TMV170/ MMGD30
Omtenta, 2020, Juni 8

(1) $$Z = \frac{(2+4i^{73})(3-6i^{69})}{(2+i)(3-i)}$$

i
$i^2 = -1$
$i^3 = i \cdot i^2 = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$

$$i^{73} = i^{a\cdot 4+b} \qquad a=? \quad b=?$$

$$73:2 = \frac{70+3}{2} = 35+1+\frac{1}{2} = 36$$

$$36:2 = 18$$

$$a=18, \quad b=? \qquad 73 = 18\cdot 4 + b$$
$$= 40+32+b = 72+b$$

$$\Rightarrow \quad b=1$$

$$i^{73} = i^{72\cdot 4+1} = (i^4)^{72}\cdot i = i$$

$$i^{69} = i^{73-4} = \frac{i^{73}}{i^4} = \frac{i}{i^4} = \frac{i}{1} = i$$

$$Z = \frac{(2+4i)(3-6i)}{(2+i)(3-i)} = \frac{6-\cancel{12i}+\cancel{12i}-24i^2}{6-2i+3i-i^2}$$

$$= \frac{6+24}{6+1+i} = \frac{30}{7+i} = \frac{30(7-i)}{(7+i)(7-i)}$$

$$= \frac{30(7-i)}{49+1} = \frac{30}{50}(7-i) = \frac{3}{5}(7-i)$$

$$= \frac{21}{5} - \frac{3}{5}i \qquad \boxed{\mathrm{Re}\,Z = 21, \quad \mathrm{Im}\,Z = -\frac{3}{5}}$$

(2)

$$y = x \ln x - \sin(\pi(x-1))$$

$$x_0 = 1 \qquad y_0 = 1 \ln 1 - \sin(\pi(1-1)) = 0$$

$$y_1 \approx \underbrace{(y')_{x=x_0} \cdot \Delta x}_{\Delta y} + y_0$$

viktig att inte glöma inre derivat

$$(y')_{x=x_0} = \left(1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x} - \cos(\pi(x-1)) \cdot \pi\right)_{x=1}$$

$$\doteq 1 - \cos 0 \cdot \pi = 1 - \pi$$

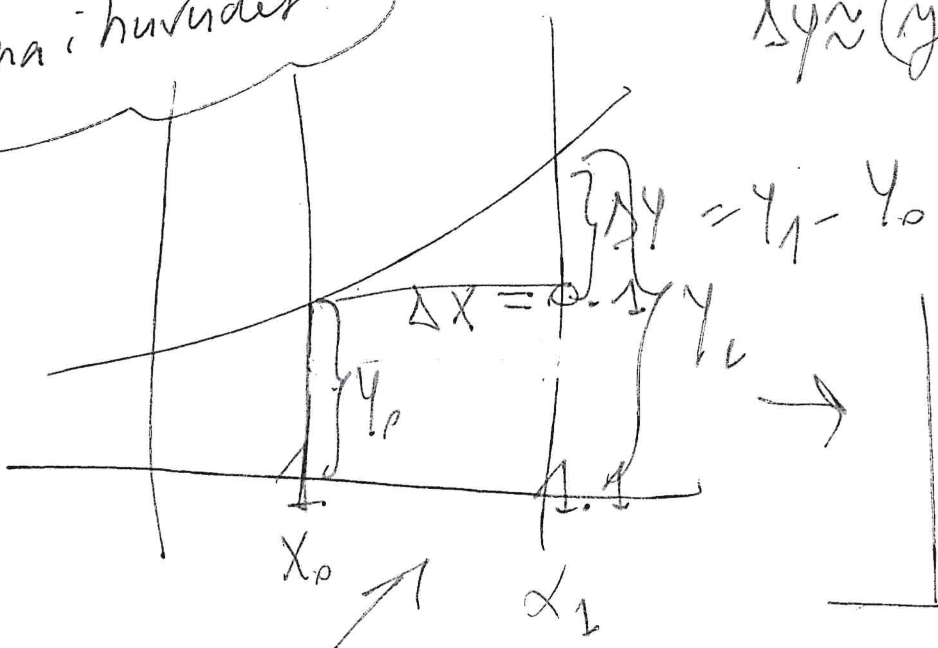
$$\Delta x = x_1 - x_0 = 1.1 - 1 = 0.1 \qquad \pi \approx 3.141$$

$$y_1 \simeq \underbrace{(1-\pi) \cdot 0{,}1}_{\Delta y} + 0 = \frac{1-\pi}{10} \approx -\frac{2.141}{10}$$

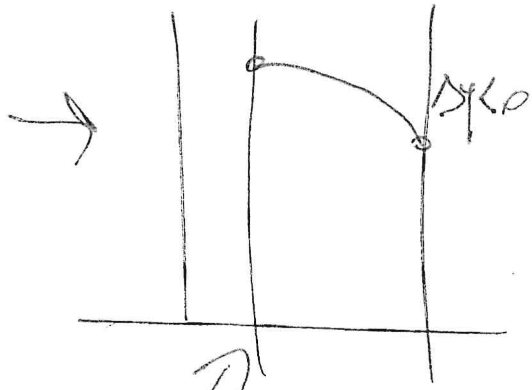
$$= -0.2141$$

går att räkna i huvudet

$$\Delta y \approx (y')_{x=x_0} \cdot \Delta x$$



delta är den vanliga grafiska representationen



grafen måste se ut så här

(3)

(Sats i ADAMS)

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow$ f(x) är kontinuerlig

för varje x när $Q(x) \neq 0$.

Q(x) har bara en nollpunkt:

$x = 1$

Vi kan, definiera

$c = f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$

allt beror på om gränsvärdet finns

och välja c utifrån detta villkor, då blir funktionen kontinuerlig.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^7 + 4x - 5}{x^5 - 1} \overset{0/0}{\Rightarrow} \text{LH}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{7x^6 + 4}{5x^4} = \frac{7+4}{5} = \frac{11}{5}$$

$$\boxed{c = \frac{11}{5}}$$

4.

$$\lim_{u \to 1} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}u\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{u-1} = \left\{ u = 1 + \Delta x \right\}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}(1+\Delta x)\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right), \quad x_0 = 1}$$

$$f(x_0 + \Delta x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}(1+\Delta x)\right)$$

$$f(x_0) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

man kunde använda den alternativa definitionen av derivatan $f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \cdot \left(\frac{\pi}{4}x\right)' = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

$$f'(x_0) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\cos^2(\pi/4)} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\lim_{u \to 1} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}u\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{u-1} = \frac{\pi}{2}}$$

5. $f(x) = x^3 \ln x - x^5 + 7 \qquad f'''(x) = ?$

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} - 5x^4 + 0$$

$$= 3x^2 \ln x + x^2 - 5x^4$$

$$f''(x) = 6x \ln x + 3x^2 \frac{1}{x} + 2x - 5 \cdot 4x^3$$

$$= 6x \ln x + 3x + 2x - 20x^3$$

$$= 6x \ln x + 5x - 20x^3$$

$$f'''(x) = 6 \ln x + 6x \frac{1}{x} + 5 - 20 \cdot 3x^2$$

$$= 6 \ln x + 6 + 5 - 60x^2$$

$$= 6 \ln x + 11 - 60x^2$$

en ganska mekanisk problem

⑥ $\underbrace{x^2+5}_{VS} = \underbrace{5xy + x^2y^3}_{HS}$ $\frac{d}{dx}VS = \frac{d}{dx}HS$

$x = y = 1$ $1^2+5 \stackrel{?}{=} 5\cdot1\cdot1+1^2\cdot1^3$

är detta en lösning?

$1+5 \stackrel{?}{=} 5+1$ ✓

$VS = HS \quad \Big| \frac{d}{dx}$

implicit derivata receptet

$\frac{d}{dx}(x^2+5) = \frac{d}{dx}(5xy+x^2y^3)$

$2x = 5y + 5xy' + 2xy^3 + x^2 3y^2y'$

nu är det enklast att använda kunskapen om vad x och y är

$x = y = 1$

$\cancel{2} = 5 + 5y' + \cancel{2} + 3y'$

$0 = 5 + 8y' \Rightarrow \boxed{y' = -\frac{5}{8}}$

(7)

$$f(x) = \begin{cases} a e^{x^2-1} & x < 1 \\ e^{b(x-1)} & x \geq 1 \end{cases}$$

om funktionen som är deriverbar i alla punkter utom i en.

den kritiska punkten är $x = 1$.

två villkor måste vara ok.

(1.) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$

(2) $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x)$

(1) $\Rightarrow$ $a e^{1^2-1} = e^{b(1-1)}$

$$\boxed{a = 1}$$

(2) $\Rightarrow$ $a e^{x^2-1} 2x = e^{b(x-1)} \cdot b \quad \Big|_{x=1}$

$a e^0 2 \cdot 1 = e^{b \cdot 0} \cdot b$

$2a = b \quad a=1 \quad \boxed{b = 2 \cdot 1 = 2}$

(8)

$$\int u\,dv = \int x^2 e^x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^x\,dx \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} du = 2x\,dx \\ v = e^x \end{array} \right\} = uv - \int v\,du$$

$$= x^2 e^x - \int e^x\, 2x\,dx$$

$$= x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow \quad du = dx \\ dv = e^x\,dx & \quad\; v = e^x \end{array} \right\}$$

$$= x^2 e^x - 2\left[x e^x - \int e^x\,dx \right]$$

$$= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C$$

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

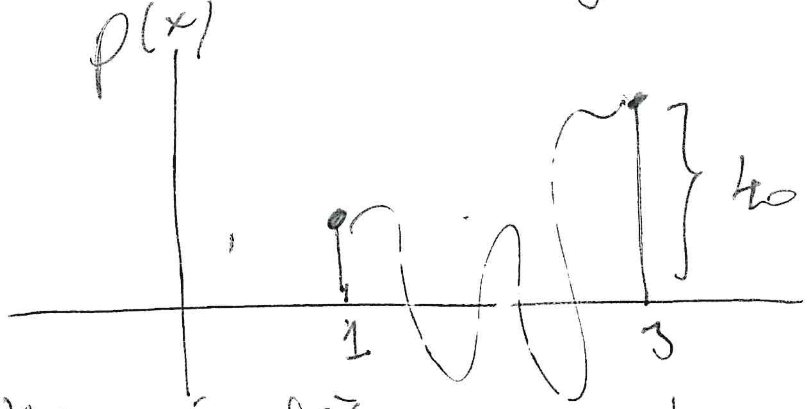
$$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

9) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$p(1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 > 0$

$p(3) = 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 9 \cdot 3 + 9 + 3 + 1$
$= 27 + 9 + 3 + 1 = 30 + 10 = 40 > 0$

Nu vet vi att grafen ser ut som



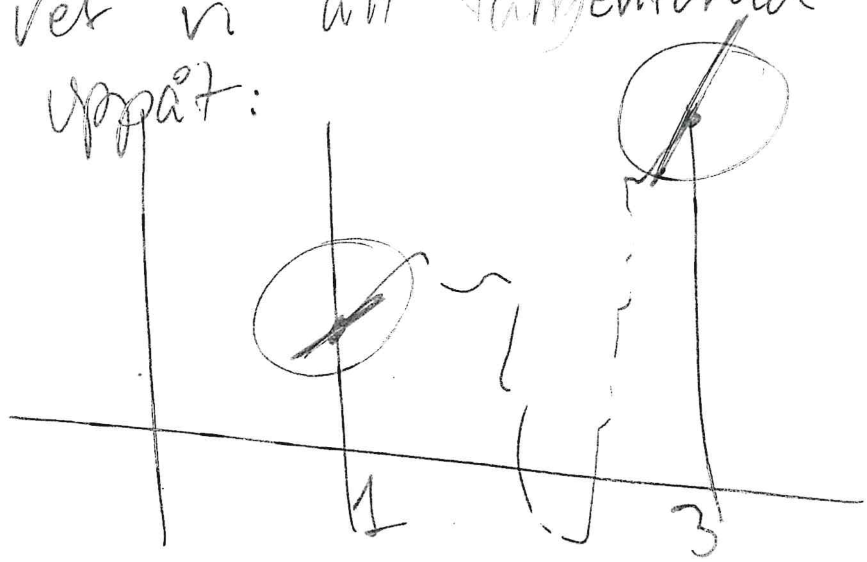
vad kan vi säga om derivatan?

$p'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$p'(1) = 3 + 2 + 1 = 6 > 0$

$p'(3) = 3 \cdot 9 + 6 + 1 = 27 + 7 = 34 > 0$

nu vet vi att tangenterna i kanter pekar uppåt:



pekar hela grafen uppåt?, alltså byter derivatan tecken någonstans i $[1,3]$? om inte, då måste hela grafen peka uppåt.

$\boxed{p'(x)=0}$, finns det en sådan punkt?

den kritiska frågan

$ax^2+bx+c=0$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$3x^2+2x+1=0$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot3\cdot1}}{2\cdot3}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot3}}{6}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{4}\sqrt{1-3}}{6}$$

$$=\frac{-2\pm2\sqrt{2}i}{6}$$

bara komplexa lösningar

aha, det händer ingenstans att derivatan byter tecken.

alltså, $p(x)$ måste växa i hela intervallet. alltså inga nollpunkter i $[1,3]$.

Dessutom,

$$p''(x) = 6x + 2$$

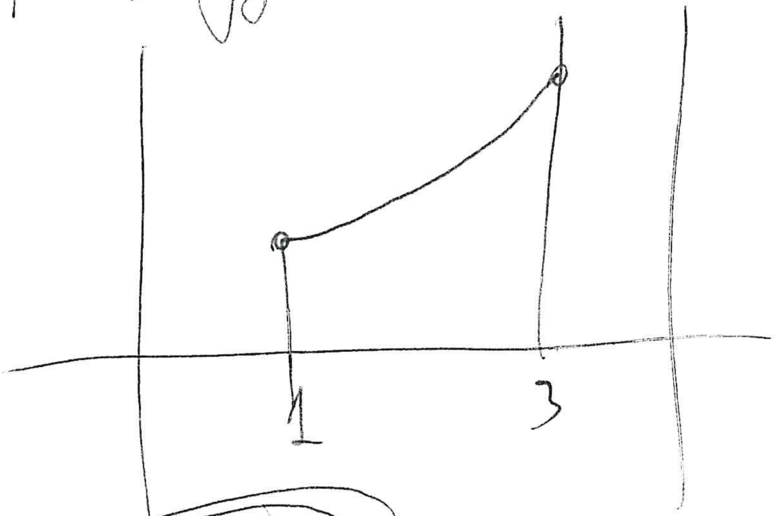
och

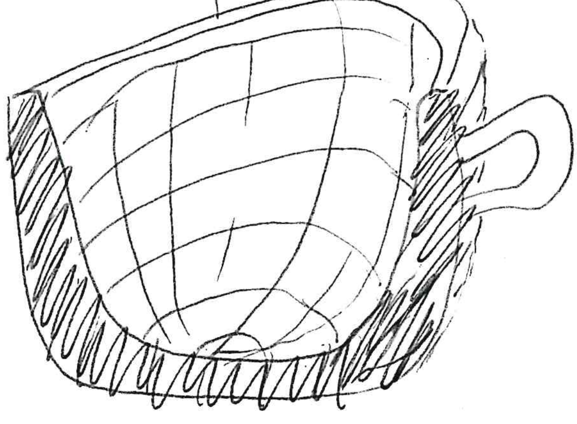
$$p''(x) > 0 \quad \text{för } x \in [1, 3]$$

alltså grafen för $p(x)$ är

Konkav, liknar undersidan av

en kaffe mugg.





(10)

$$(xy^2 + x)\,dx + (x^2y - y)\,dy = 0$$

separations
teknikken
$f(x)dx = g(y)dy$
$\int VS = \int HS$ | 10/1

$$x(y^2+1)\,dx + (x^2-1)\,y\,dy = 0$$

$$x(y^2+1)\,dx = (1-x^2)\,y\,dy$$

$$\frac{x}{1-x^2}\,dx = \frac{y\,dy}{1+y^2} \quad \Big|\int$$

$$\int \frac{x}{1-x^2}\,dx = \int \frac{y\,dy}{1+y^2}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(1-x^2) = \frac{1}{1-x^2}(-2x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)\right] = \frac{x}{1-x^2} \quad \Big|\int$$

$$c_1 - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) = \int \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$\frac{d}{dy}\ln(1+y^2) = \frac{1}{1+y^2}\cdot 2y$$

$$\Rightarrow \int \frac{y\,dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + c_2$$

$$c_1 - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + c_2$$

$$c_1 - c_2 - \frac{1}{2}\ln(1-x^2) = \frac{1}{2}\ln(1+y^2)$$

$$\underbrace{2(c_1-c_2)}_{c_3} - \ln(1-x^2) = \ln(1+y^2)$$

$$c_3 - \ln(1-x^2) = \ln(1+y^2) \quad \Big| \; e^{\wedge}$$

$$\underbrace{e^{c_3}}_{c_4} e^{-\ln(1-x^2)} = e^{\ln(1+y^2)}$$

$$c_4 \frac{1}{1-x^2} = 1+y^2$$

$$y^2 = \frac{c_4}{1-x^2} - 1$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{c_4}{1-x^2} - 1}$$

$x=0,\ y=1 \qquad 1 = \pm\sqrt{\frac{c_4}{1-0} - 1}$

$\Rightarrow$ vi måste välja "+" och

då $1 = c_4 - 1 \Rightarrow c_4 = 2$

Svaret är

$$y = \overset{!}{\underset{-}{+}} \sqrt{\frac{2}{1-x^2} - 1}$$

$$= + \sqrt{\frac{2 - (1-x^2)}{1-x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 - 1 + x^2}{1-x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$$

(11)

$$y'' - 6y' + 10y = x+1$$

homogen ekvation först:

$$y_h'' - 6y_h' + 10y_h = 0$$

$$y_h = Ae^{r.x}$$

vi letar lösningen i detta form

$$r^2 - 6r + 10 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36-40}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2}$$

$$= 3 \pm i$$

$$\boxed{y_h(x) = A_1 e^{3x} \sin x + A_2 e^{3x} \cos x}$$

$$y_p = ax+b$$

$$y_p' = a$$

$$y_p'' = 0$$

$$P_1(x) \overset{?}{=} P_2(x)$$

när är två polynomer lika?

$$y_p'' - 6y_p' + 10y_p = x+1$$

$$\underbrace{0 - 6\cdot a + 10(ax+b)}_{P_1(x)} = \underbrace{x+1}_{P_2(x)}$$

$$\underline{10ax} + \underline{10b - 6a} = \underline{x} + \underline{1}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{10a = 1}$$

$$\underline{10b - 6a = 1}$$

polynomena är lika när alla konstanter är lika

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{10}$$

$$b = \frac{1}{10}(1+6a) = \frac{1}{10}\left(1+\frac{6}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\frac{10+6}{10} = \frac{16}{10\cdot 10}$$

$$= \frac{\cancel{2}\cdot 8}{\cancel{2}\cdot 5\cdot 10} = \frac{8}{50} = \frac{\cancel{2}\cdot 4}{\cancel{2}\cdot 25} = \frac{4}{25}$$

$$\boxed{y_p = \frac{1}{10}x + \frac{4}{25}}$$

$$y(x) = y_h + y_p$$

$$= A_1 e^{3x} \sin x + A_2 e^{3x} \cos x$$

$$+ \frac{x}{10} + \frac{4}{25}$$

"mallen"

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = A_2 + \frac{4}{25} \Rightarrow A_2 = -\frac{4}{25}$$

$$y'(0) = 1/10 \Rightarrow \frac{1}{10} = \Big\{ 3e^{3x}(A_1 \sin x + A_2 \cos x)$$

$$+ e^{3x}(A_1 \cos x - A_2 \sin x)$$

$$+ \frac{1}{10} \Big\}_{x=0}$$

$$\frac{1}{10} = 3A_2 + A_1 + \frac{1}{10}$$

$$A_1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} - 3A_2 = 0 - 3\left(-\frac{4}{25}\right)$$

$$= \frac{12}{25}$$

11/4

$$\boxed{y(x) = \left(\frac{12}{25}\sin x - \frac{4}{25}\cos x\right)e^{3x} + \frac{x}{10} + \frac{4}{25}}$$

(12) $e^x = 1 + x$

Kollar att $x=0$ är en lösning:

$$x=0 \quad (e^x)_{x=0} = e^0 = 1$$
$$(1+x)_{x=0} = 1$$
✓

vi definierar: $a=0$;

- $f(x) = e^x - (1+x)$
- vi vet att $f(a)=0$, alltså $x=a$ är en lösning till $f(x)=0$.

Anta att det finns en lösning till, att det finns $b \neq a$ sådan att

$$f(b)=0$$

- $f(x)$ är kontinuerlig i $[a,b]$ och
- deriverbar i (a,b). Enligt Rolle's teorem, det finns ett c sådant att

$$f'(c)=0 \quad \text{och} \quad c \in (a,b)$$

12/2

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^x - (x+1)\right)$$

$$= e^x - 1$$

alltså det finns ξ sådant att

$$0 = e^{\xi} - 1$$

formel blad $x > 0 \Rightarrow e^x > 1$

men detta är omöjligt.

Alltså det kan inte finnas ett $b \neq a$ som är lösningen till $f(b) = 0$

Q.E.D.

13

$$\lim_{x\to 1}\left\{\tan\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi(x^2-1)}{4x\cos^2\frac{\pi x}{2}}\right\}=?$$

STRATEGI: $\frac{1}{0}\pm\frac{0}{0^2}=\frac{1\cdot 0\pm 0}{0^2}\sim\frac{0}{0}$ LH

$$?=\lim_{x\to 1}\left\{\underbrace{\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}}+\frac{\pi(x^2-1)}{4x}\,\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}\right\}$$

$$\frac{\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\sin\left(2\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}\sin(\pi x)+\frac{\pi(x^2-1)}{4x}}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}$$

"Stå då" konstanter

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)+\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}$$

$$=\left\{\frac{0+0}{0^2}\to\frac{0}{0},\ \text{LH}\right\}=$$

13/2

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 1} \frac{\cos \pi x \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{2 \cos \frac{\pi x}{2} \cdot \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \frac{\pi}{2}(-)}$$

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2} \cdot 2\right) = \sin \pi x$$

škoda konstanta

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 1} \frac{\pi}{-\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \pi x + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\sin \pi x}$$

škoda

$$= -\frac{2}{2} \lim_{x \to 1} \frac{\cos \pi x + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\sin \pi x}$$

$$= \left\{ \frac{-1 + \frac{1}{2}(1+1)}{0} = \frac{-1+1}{0} = \frac{0}{0}, \text{LH} \right)$$

$$= - \lim_{x \to 1} \frac{-\sin \pi x \cdot \pi + \frac{1}{2}(-)2 \frac{1}{x^3}}{\cos \pi x \cdot \pi}$$

$$= - \lim_{x \to 1} \frac{0 - \frac{1}{x^3}}{(-1) \cdot \pi}$$

$$= - \frac{-1}{-\pi} = - \frac{1}{\pi}$$