

Tentamen: TMV170/MMGD30 Matematisk analys, 2020-03-19 (eftermiddags pass)

14.00 – 18.00: Tentamen – skriv alla svar på pappret; 18.00 – 18.30: Förbereda filer – ta bilder eller skanna och ladda upp i CANVAS. Om problem uppstår skicka över e-målet till examinatorn (zorank@chalmers.se).

Examinator: Zoran Konkoli, telefon 5480, MC2, Chalmers

Telefonvakt: Zoran Konkoli, telefon: 5480

Hjälpmedel: Detta är en hemtentamen och alla medel är tillåtna. **Därför är det extra viktigt att alla argumenterar noggrant och förklarar kritiska steg i alla uträkningar.** Uppgifterna kräver ingen miniräknare.

Hela tentamen ger 50 poäng. Eventuella bonuspoäng från duggor adderas innan betyget räknas. Godkänt på alla duggor ger 5 poäng. TMV170: För betyget 3 på tentamen krävs minst 20 poäng, för betyget 4 krävs 30 poäng, och för betyget 5 krävs 40 poäng. MMGD30: för betyget G krävs minst 20 poäng, och för VG krävs minst 36 poäng. Tid och plats för granskning av tentamen kommer att anslås på kursens hemsida.

Grupp 1: G frågor (8 x 3p)

1. Vad är realdelen och imaginärdelen av z ?

$$z = \frac{(2i^4 + 3i)(3 + 4i^3)}{(1 + i)(2 + i)}$$

2. För funktionen

$$y = x^2 - 5x + \ln x$$

beräkna Δx och Δy som motsvarar ändringen från $x = 1$ (referens värdet) till $x = 1.1$ (det nya värdet). Ökar eller minskar y ?

3. Vi betraktar en funktion $f: \left[0, \frac{12}{10}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ definierad som

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^4 - 7x + 6} & x \neq 1 \\ c & x = 1 \end{cases}$$

Går det att definiera konstanten c så att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i sin definitionsmängd $D_f = \left[0, \frac{12}{10}\right]$? Specificera villkoret för kontinuitet och visa tydligt hur du använder den för att lösa problemet. Polynomet $x^4 - 7x + 6$ har två noll punkter: $x = 1$ och $x = 1.38919$.

4. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3\sqrt{x})}{\sin \sqrt{3x}}$$

5. Funktionen f är definierad som nedan. Beräkna derivatan av f . Svaret går att förenkla avsevärt. Försök att göra det genom att kombinera alla termer till en gemensam nämnare så att det endast blir ett bråk streck.

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(1 + \sqrt{x})$$

6. Beräkna derivatan $\frac{dy}{dx}$ i punkten $x = 1$ och $y = 1$. Funktionen definieras som nedan. Använd implicit derivering.

$$6x^2 = y + 2y^7 + 3y^{11}$$

7. Går det att hitta fria konstanter a och b så att funktionen $f(x)$ är deriverbar för alla reella tal? Om "ja", förklara varför och hitta konstanterna. Om "inte", förklara varför.

$$f(x) = \begin{cases} a \sin(x) + x \cos x & x < 0 \\ \cos(x + b) & x \geq 0 \end{cases}$$

8. Räkna nedanstående integral med partiellintegrationstekniken.

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

Grupp 2: VG frågor (3 x 4p)

9. Beräkna integralen nedanför. Är detta en bestämd eller en obestämd integral?

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^2 - 4} \, dx$$

10. Hitta lösningen till differentialekvationen med separationstekniken

$$\tan x \sin y \, dx + \cos x \cot y \, dy = 0$$

där lösningen definieras med begynnelsevillkoret $y(0) = \pi/6$.

11. Hitta lösningen till differentialekvationen

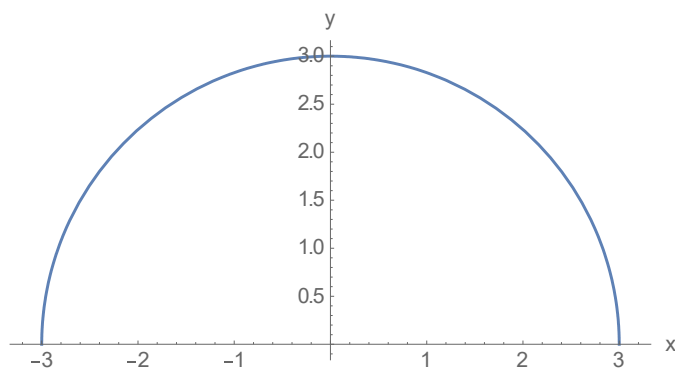
$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 1$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1/5$. Tips: den partikulära lösningen kan letas i formen $y_p(x) = c$ där c är en konstant.

Grupp 3: MVG frågor (2 x 7p)

12. Bestäm om följande gränsvärde existerar och i så fall beräkna det:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cot \sqrt{x})^{\frac{1}{\ln x}}$$



13. Hitta centrum av massan av en böjd metalltråd som visas i bilden. Tråden har ett konstant tvärsnitt. En liten längd av tråden dl har en massa $dm = \sigma dl$ där σ är en material konstant som inte är viktig för problemet. Trådens geometri beskrivs med villkoret $x^2 + y^2 = 9$ där $x \in [-3, 3]$ och $y \geq 0$. Beräkna centrum av massan i x - och y -led. Tips: $dl^2 = dx^2 + dy^2$ och $dl = \sqrt{dl^2}$.

Formel blad

$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$	$(fg)' = f'g + fg'$
$(\sin x)' = \cos x$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(e^x)' = e^x$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
$\int u dv = uv - \int v du$	$df = f'(x)dx, \Delta y \approx \frac{dy}{dx} \Delta x$
$x_{CM} = \frac{\int x dm}{\int dm}, y_{CM} = \frac{\int y dm}{\int dm}, dm = \sigma dl$	$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g)g'(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c$