Tentamen: TMV170/MMGD30 Matematisk analys

2020-03-19 (förmidags pass)

8.00 – 12.00: Tentamen – skriv alla svar på pappret; 12.00 – 12.30: Förbereda filer – ta bilder eller skanna och ladda upp i CANVAS. Om problem uppstår skicka över e-mailet till examinatorn (zorank@chalmers.se).

Examinator: Zoran Konkoli, telefon 5480, MC2, Chalmers

Telefonvakt: Zoran Konkoli, telefon: 5480

Hjälpmedel: Detta är en hemtentamen och alla medel är tillåtna. **Därför är det extra viktig att alla argumenterar noggrant och förklarar kritiska steg i alla uträkningar.** Uppgifterna kräver ingen miniräknare.

Hela tentamen ger 50 poäng. Eventuella bonuspoäng från duggor adderas innan betyget räknas. Godkänt på alla duggor ger 5 poäng. TMV170: För betyget 3 på tentamen krävs minst 20 poäng, för betyget 4 krävs 30 poäng, och för betyget 5 krävs 40 poäng. MMGD30: för betyget G krävs minst 20 poäng, och för VG krävs minst 36 poäng. Tid och plats för granskning av tentamen kommer att anslås på kursens hemsida.

Grupp 1: G frågor (8 x 3p)

1. Vad är realdelen och imaginärdelen av z?

$$z = \frac{(3i^4 + 2i)(4 + 3i^5)}{(1 + i)(2 - i)}$$

2. För funktionen

$$y = 2x^3 - 5x^2 + \sin(x - 1)$$

beräkna Δx och Δy som motsvarar ändringen från $x = 1$ (referens värdet) till $x = 1.1$ (det nya värdet). Ökar eller minskar y?

3. Vi betraktar en funktion $f\colon \left[0, \frac{12}{10}\right] \to R$ definierad som

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 2x^3 - 2x + 3}{x^6 - 6x^2 + 5} & x \neq 1 \\ c & x = 1 \end{cases}$$

Går det att definiera konstanten c så att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i sin definitionsmängd $D_f = \left[0, \frac{12}{10}\right]$? Specificera villkoret för kontinuitet och visa tydligt hur du använder den för att lösa problemet. Polynomet $x^6 - 6x^2 + 5$ har fyra noll punkter: $x = \pm 1.33839$ och $x = \pm 1$.

4. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(3\sqrt{x - 1})}{2\sqrt{x - 1}}$$

5. Funktionen f är definierad som nedan. Beräkna derivatan av f. Svaret går att förenkla. Försök att göra det genom att kombinera alla termer till en gemensam nämnare så att det endast blir ett bråk streck.

$$f(x) = (\ln x)^2 - \ln(\ln x)$$

6. Beräkna derivatan $\frac{dy}{dx}$ i punkten $x = 1$ och $y = 1$. Funktionen definieras som nedan. Använd implicit derivering.

$$2x^2 + 7 = y + 3y^4 + 5y^5$$

7. Går det att hitta fria konstanter a och b så att funktionen $f(x)$ är deriverbar för alla reella tal? Om "ja", förklara varför och hitta konstanterna. Om "inte", förklara varför.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + \cos x & x < 0 \\ \sin(x + b) & x \geq 0 \end{cases}$$

8. Räkna nedanstående integral med partiellintegrationstekniken.

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

Grupp 2: VG frågor (3 x 4p)

9. Beräkna integralen nedanför. Är detta en bestämd eller en obestämd integral?

$$\int \frac{x^4 - 78}{x^2 - 9} dx$$

10. Hitta lösningen till differentialekvationen med separationstekniken

$$(1 + e^x)\, y\, dy - e^x dx = 0$$

där lösningen definieras med begynnelsevillkoret $y(0) = 1$.

11. Hitta lösningen till differentialekvationen

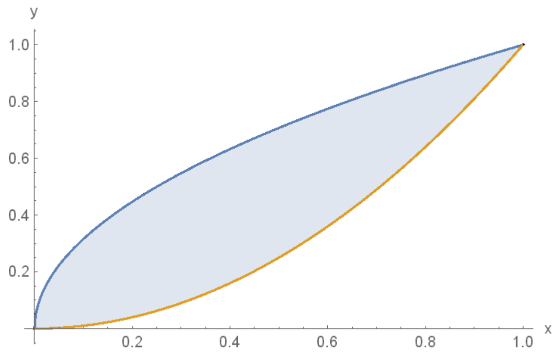
$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = x$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. Tips: den partikulära lösningen kan letas i formen $y_p(x) = ax + b$ där a och b är konstanter.

Grupp 3: MVG frågor (2 x 7p)

12. Bestäm om följande gränsvärde existerar och i så fall beräkna det:

$$\lim_{x \to 0} \left(\cos(2\sqrt{x})\right)^{\frac{3}{x}}$$



13. Beräkna centrum av massan av 2D ytan som visas i bilden. Ytan ligger mellan linjerna definierade med grafer $y_1 = x^2$ och $y_2 = \sqrt{x}$ för $x \in [0,1]$? Notera att i detta intervall $y_2 \geq y_1$. En liten area dA av materialet har massan $dm = \sigma dA$ där σ är en material konstant som inte är viktig för problemet. Räkna centrum av massan i x- och y- led.

Formel blad

$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$	$(fg)' = f'g + fg'$
$(\sin x)' = \cos x$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\ln \lvert x \rvert)' = \frac{1}{x}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(e^x)' = e^x$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
$\int u\,dv = uv - \int v\,du$	$df = f'(x)dx, \Delta f \approx f'(x)\Delta x$
$x_{CM} = \frac{\int x dm}{\int dm}, y_{CM} = \frac{\int y dm}{\int dm}, dm = \sigma dA$	$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f'(g)g'(x)$