Matematik
Göteborgs universitet
H.C.

Inga hjälpmedel
Telefonvakt:
Maximilian Thaller
ankn 5325

Tentamen, Matematisk analys, TMV170/MMGD30

Torsdag den 21 mars 2019, $14^{00} - 18^{00}$

Varje uppgift ger maximalt 6 poäng utom uppgift 1 som kan ge 8 poäng.

1. (a) Ge definitionen av att $f(x)$ är deriverbar i punkten a.

   (b) Formulera produktregeln för derivering.

   (c) Bevisa den.

2. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx \ .$$

3. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(x) - \frac{x}{1+x^2} y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

4. Bestäm lokala extrempunkter och asymptoter till kurvan

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$$

   och skissera kurvan.

5. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x \ .$$

Var god vänd.

6. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{\arctan(3x) - 3\arctan(x)} \ .$$

Hjälp?: Du får använda att Taylorutvecklingen av $\arctan x$ av grad fem är

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7), x \to 0 \ .$$

7. Skissera det område i planet som ges av olikheterna $|x| \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}$. Beräkna sedan volymen av den kropp som bildas då området

   (a) roterar kring x-axeln,

   (b) roterar kring y-axeln.

8. Visa att

$$\frac{\pi}{4} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + |\sin x|} \leq 1 \ .$$

Förslag till lösningar,

Analys TMV170/MMGD30 21 mars 2019,

1. Se kurslitteraturen

2.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx &= \begin{bmatrix} t=\sqrt{x}, x=t^2, dx=2tdt \\ 0 \mapsto 0, \infty \mapsto \infty \end{bmatrix} \\
&= 2\int_0^\infty te^{-t}dt = \begin{pmatrix} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{pmatrix} \\
&= 2\left(-te^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}dt\right) = 2\left(-e^{-t}\Big|_0^\infty\right) = 2\ .
\end{aligned}$$

3. Eftersom

$$\int -\frac{x}{1+x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$$

är den integrerande faktorn

$$e^{\ln(1/\sqrt{1+x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ .$$

Vi får

$$\left(\frac{y(x)}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1}{1+x^2}\ ,$$

och

$$\frac{y(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x + C\ .$$

Sätter vi $x=0$ får vi $C = \arctan 0 + C = y(0) = 1$, och slutligen

$$y(x) = \sqrt{1+x^2}(1+\arctan x)\ .$$

4. Funktionen

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$$

är definierad då $x \neq \pm\sqrt{3}$. Derivering ger

$$f'(x) = \cdots = \frac{x^2(x-3)(x+3)}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}$$

Vi får följande teckentabell:

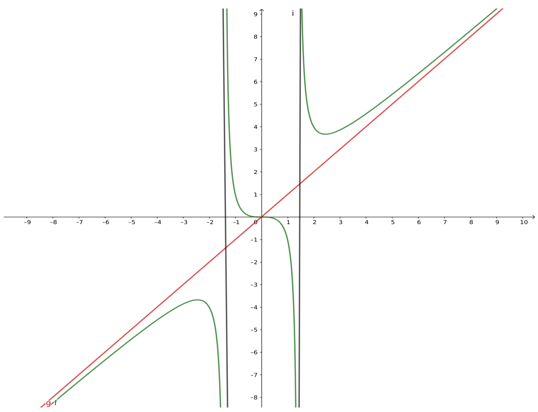
x		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3	
f'	$+\,+$	0	$-\,-$	ej def.	$-\,-$	0	$-\,-$	ej def.	$-\,-$	0	$+\,+$
f	$\nearrow$	$-9/2$ max	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	0 terass	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	$9/2$ min	$\nearrow$

Eftersom $\lim_{x\to\pm\sqrt{3}} |f(x)| = +\infty$ är linjerna $x = \sqrt{3}$ och $x = -\sqrt{3}$ lodräta asymptoter. Mer precist har vi $\lim_{x\to\sqrt{3}+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\sqrt{3}-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\sqrt{3}+} f(x) = +\infty$ och $\lim_{x\to-\sqrt{3}-} f(x) = -\infty$.

Division ger

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-3} = x + \frac{3x}{x^2-3}\ ,$$

så $f(x) - x \to 0$, $x \to \pm\infty$ och alltså är linjen $y = x$ en sned asymptot.



5. Den homogena ekvationen $y_h'' - 3y_h' + 2y_h = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^2 - 3r + 2 = 0$ med rötterna $r = 1$ och $r = 2$. Så homogenlösningen är

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}\ .$$

För att bestämma en partikulärlösning till $y_p'' - 3y_p' + 2y_p = e^x$, observerar vi att vi har resonans, dvs. att högerledet e^x ingår i homogenlösningen. Så vi ansätter $y_p(x) = Axe^x$ och får $y_p'(x) = A(x+1)e^x$ $y_p''(x) = A(x+2)e^x$. Detta ger $Ae^x(x+2-3(x+1)+2x) = e^x$, $-Ae^x = e^x$ och $A = -1$. Alltså är $y_p(x) = -xe^x$ en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen är

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (C_1 - x)e^x + C_2 e^{2x} .$$

6. Taylorutvecklingen av $\sin t$ är $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + O(t^5)$, $t \to 0$. Så

$$\begin{aligned} &3\sin(x) - \sin(3x) = \\ &\qquad 3x - \frac{1}{2}x^3 - (3x - \frac{9}{2}x^3) + O(x^5) = 4x^3 + O(x^5),\ x \to 0 . \end{aligned}$$

Med hjälp av Hjälp? får vi på liknande sätt att

$$\begin{aligned} &\arctan(3x) - 3\arctan(x) = \\ &\qquad 3x - 9x^3 - 3(x - \frac{1}{3}x^3) + O(x^5) = -8x^3 + O(x^5),\ x \to 0 . \end{aligned}$$

Vi får

$$\begin{aligned} &\frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{\arctan(3x) - 3\arctan(x)} = \\ &\qquad \frac{4x^3 + O(x^5)}{-8x^3 + O(x^5)} = \frac{4 + O(x^2)}{-8 + O(x^2)} \to \frac{4+0}{-8+0} = -\frac{1}{2},\ x \to 0 . \end{aligned}$$

7. Området är en kvartscirkel kring origo med radien 2 kring positiva y-axeln.

   (a) Vi använder skivformeln. När området roterar kring x-axeln bildas cirkelringar med inre radie $|x|$ och yttre radie $\sqrt{2 - x^2}$. Så arean är $A(x) = \pi(2 - x^2 - |x|^2) = 2\pi(1 - x^2)$. Så volymen blir

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-1}^{1} 1 - x^2 dx = \text{(jämn integrand)} \\ &= 4\pi \int_0^1 1 - x^2 dx = 4\pi(1 - \frac{1}{3}) = \frac{8\pi}{3} . \end{aligned}$$

(b) När området roterar kring y-axeln har ”skalet mellan x och $x+dx$” höjden $\sqrt{2-x^2}-x$ och volymen $2\pi x(\sqrt{2-x^2}-x)dx$. Integration ger

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (x\sqrt{2-x^2} - x^2)dx \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{3}(2-x^2)^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{2}{3}\pi \left(2\sqrt{2} - 1 - 1 \right) = \frac{4}{3}\pi \left(\sqrt{2} - 1 \right) . \end{aligned}$$

8. Eftersom $0 \leq |\sin x| \leq 1$ gäller $x^2 \leq x^2 + |\sin x| \leq x^2 + 1$ och

$$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2 + |\sin x|} \leq \frac{1}{x^2} .$$

Nu gäller

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x \Big|_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} ,$$

vilket bevisar den vänstra olikheten.

Den högra olikheten följer eftersom

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1 .$$