

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys TMV170/MMGD30, 2018-08-28, TID(8.30-12.30)

Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare

Telefonvakt: Mattias Lennartsson, ankn 5325

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Beräkna derivatan av funktionerna

$$f(x) = \tan(2 \arctan(3x))$$

och

$$g(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} e^{t^2} dt$$

samt beräkna $f'(0)$ och $g'(\frac{\pi}{2})$. Förenkla så långt som möjligt.

(3+3p)

2. Lös för $x > 0$ differentialekvationen

$$(x^2 + x)y' + y = y^2.$$

(6p)

3. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' - 7y' + 6y = \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

4. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(a + be^x)}{\sqrt{c + dx^2}}$$

där b och $d > 0$.

(4p)

V.G.V.

5. Avgör för vilka $p \in \mathbb{R}$ som integralen

$$\int_0^1 \frac{x^p}{\sin(x^2)} dx$$

konvergerar och för vilka p som integralen divergerar.

(6p)

6. Beräkna

$$\int_0^2 \frac{x^4 + 1}{(4 + x^2)^2} dx.$$

(8p)

7. Beräkna det största värde som

$$\left| \frac{1}{z + 2 + i} \right|$$

antar då det komplexa talet z ligger på den räta linje som i det komplexa talplanet går genom punkterna 3 och $3i$.

(5p)

8. Sätt

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Låt P vara punkten med x -koordinaten $h > 0$ på kurvan $y = f(x)$, och R punkten $(0, f(0))$. Beteckna med $B(h)$ arean av den axelparallella rektangeln PQRS där S är punkten $(0, f(h))$. Låt $A(h)$ beteckna arean av området i PQRS som ligger under grafen till f . Bestäm

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(h)}{B(h)}.$$

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK

① $f(x) = \tan(2 \arctan(3x))$

$$g(x) = \int \frac{\sin^x}{\cos x} e^{t^2} dt$$

Beräkna $f'(x)$, $g'(x)$ och $f'(0)$, $g'(\frac{\pi}{2})$

Lösning:

$$f'(x) = (1 + (\tan(2 \arctan(3x)))^2) \cdot 2 \cdot \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3 =$$

$$= \frac{6}{1+9x^2} (1 + (\tan(2 \arctan(3x)))^2)$$

$$\text{Vi har } \tan(2t) = \frac{\sin(2t)}{\cos(2t)} = \frac{2 \cos t \cdot \sin t}{\cos^2 t - \sin^2 t} =$$

$$= \frac{2 \tan t}{1 - (\tan t)^2} \quad \text{då } \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \neq 0$$

Med $t = \arctan(3x)$ får

$$\tan(2 \arctan(3x)) = \frac{2 \cdot 3x}{1 - (3x)^2} = \frac{6x}{1 - 9x^2}, \quad x \neq \pm \frac{1}{3}$$

$$g'(x) = e^{\sin^2 x} \cdot \cos x - e^{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) =$$

$$= e^{\sin^2 x} \cdot \cos x + e^{\cos^2 x} \cdot \sin x$$

$$\text{Vi får } f'(0) = 6, \quad g'(\frac{\pi}{2}) = 1$$

Svar: $f'(0) = 6, \quad g'(\frac{\pi}{2}) = 1$

② $(x^2 + x)y' + y = y^2, \quad x > 0$

Lösning: Detta är en separabel diff-ek

För $y \neq 0, 1$ gäller

$$\frac{1}{y(y-1)} \cdot y' = \frac{1}{x(x+1)}$$

Vi har

$$\int \frac{1}{x(x+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln x - \ln(x+1) = \ln \frac{x}{x+1}, \quad x >$$

$$\int \frac{1}{y(y-1)} dy = \int \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} \right) dy = -\ln|y| + \ln|y-1| =$$

$$= \ln \left| \frac{y-1}{y} \right|$$

Detta ger $\ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = \ln \frac{x}{x+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$

Med $c = \ln C', \quad C' > 0$ får

$$\left| \frac{y-1}{y} \right| = C' \frac{x}{x+1}$$

dvs $\frac{y-1}{y} = C' \frac{x}{x+1}, \quad C' \neq 0$

Detta ger

$$\frac{1}{y} = 1 - c \frac{x}{x+1} = \frac{(1-c)x+1}{x+1}$$

dvs

$$y(x) = \frac{x+1}{Dx+1}, \quad D \neq 1, \quad Dx+1 \neq 0$$

Dessutom är $y(x) = 0$, $y(x) = 1$ två lösningar

Svar: $y(x) = \frac{x+1}{Dx+1}$, $x \neq -\frac{1}{D}$ om $D \neq 0$

och $y(x) = 0$.

$$\textcircled{3} \begin{cases} y'' - 7y' + 6y = \sin x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Lösning: Kar. polynom $r^2 - 7r + 6 = (r - \frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4} + 6 =$
 $= (r - \frac{7}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 = (r-6)(r-1)$.

Alltså $y_h(x) = Ae^{6x} + Be^x$

Ansätt $y_p(x) = a \cos x + b \sin x$. Derivering och insättning i diff. ek. ger

$$-a \cos x - b \sin x - 7(-a \sin x + b \cos x) + 6(a \cos x + b \sin x) = \sin x$$

dvs $(5a - 7b) \cos x + (5b + 7a - 1) \sin x = 0$

Alltså

$$\begin{cases} 5a - 7b = 0 \\ 7a + 5b = 1 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} a = \frac{7}{74} \\ b = \frac{5}{74} \end{cases}$$

Vi får $y(x) = Ae^{6x} + Be^x + \frac{7}{74} \cos x + \frac{5}{74} \sin x$.

A och B bestäms av villkoren $y(0) = y'(0) = 0$.

$$\begin{cases} A + B + \frac{7}{74} = 0 \\ 6A + B + \frac{5}{74} = 0 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{5 \cdot 37} = \frac{1}{185} \\ B = -\frac{1}{10} \end{cases}$$

Svar: $y(x) = \frac{1}{185} e^{6x} - \frac{1}{10} e^x + \frac{7}{74} \cos x + \frac{5}{74} \sin x$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(a+be^x)}{\sqrt{c+dx^2}} \quad \text{där } b, d > 0$$

Lösning: För $x \gg 1$ gäller

$$\frac{\ln(a+be^x)}{\sqrt{c+dx^2}} = \frac{\ln(a+be^x) - \ln(be^x) + \ln(be^x)}{\sqrt{dx} \sqrt{1 + \frac{c}{dx^2}}}$$

där $\ln(a+be^x) - \ln(be^x) = \ln\left(\frac{a+be^x}{be^x}\right) \rightarrow \ln 1 = 0, x \rightarrow \infty$

och $\sqrt{1 + \frac{c}{dx^2}} \rightarrow 1, x \rightarrow \infty$

och $\frac{\ln(b \cdot e^x)}{x} = \frac{\ln b + \ln e^x}{x} = \frac{\ln b + x}{x} \rightarrow 1, x \rightarrow \infty$

Alltså, det sökta gränsvärdet är $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Svar: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

⑤ För vilka $p \in \mathbb{R}$ konvergerar $\int_0^1 \frac{x^p}{\sin(x^2)} dx$?

Lösning: Vi vet att

$\int_0^1 x^r dx$ konvergerar om och endast om $r > -1$.

För $x \in (0, 1)$ gäller

$$\frac{2}{\pi} x < \sin x < x \quad (\text{känt})$$

Alltså $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin(x^2)}{x^2} < 1$ för alla $x \in (0, 1)$.

Detta ger med $\frac{x^p}{\sin(x^2)} = \frac{x^2}{\sin(x^2)} \cdot x^{p-2}$ att

$$\frac{2}{\pi} x^{p-2} < \frac{x^p}{\sin(x^2)} < x^{p-2} \quad \text{för } x \in (0, 1)$$

och jämförelsekriteriet ger att $\int_0^1 \frac{x^p}{\sin(x^2)} dx$

konvergerar om och endast om $p-2 > -1$ dvs $p > 1$.

Svar: konvergerar för $p > 1$ och divergerar för $p \leq 1$.

⑥ Beräkna $\int_0^2 \frac{x^4+1}{(4+x^2)^2} dx$

Lösning: $\frac{x^4+1}{(4+x^2)^2} = \frac{x^4+1}{x^4+8x^2+16} = 1 - \frac{8x^2+15}{(x^2+4)^2}$

Partialbräcksuppdelning av andra termen

$$\frac{8x^2+15}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}$$

där

$$8x^2+15 = (Ax+B)(x^2+4) + Cx+D$$

ger

$$\left\{ \begin{array}{l} A=0 \\ B=8 \\ 4A+C=0 \\ 4B+D=15 \end{array} \right. \quad \text{dvs} \quad \left\{ \begin{array}{l} A=0 \\ B=8 \\ C=0 \\ D=-17 \end{array} \right.$$

Vidare gäller

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{x^2+4} dx &= \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2} dx = \left\{ t = \frac{x}{2}, dt = \frac{1}{2} dx \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} [\arctan t]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{(x^2+4)^2} dx = \frac{1}{16} \int_0^2 \frac{1}{(1+(\frac{x}{2})^2)^2} dx = \left\{ t = \frac{x}{2}, dt = \frac{1}{2} dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt ;$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^1 \frac{1+t^2 - t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{t \cdot (-2t)}{(1+t^2)^2} dt = \{PI\} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \left[-\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}$$

Altså

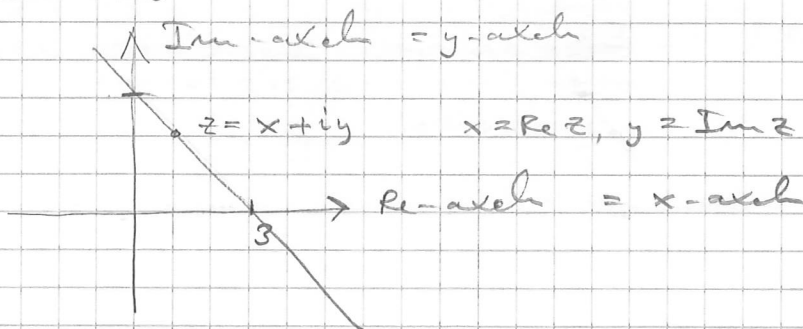
$$\int_0^2 \frac{x^2+1}{(4+x^2)^2} dx = 2 - \left(8 \cdot \frac{\pi}{8} - \frac{17}{8} \cdot \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) \right) =$$

$$= \frac{81}{32} - \frac{47}{64} \pi \quad (\approx 0,22)$$

Svar: $\frac{81}{32} - \frac{47}{64} \pi$

7) Beräkna $\max_{z \in \Gamma} \left| \frac{1}{z+2+i} \right|$ för Γ är räta linjen genom 3 och $3i$

Lösning:



$$y = -x + 3 \quad \text{ger} \quad |z + 2 + i| = |x + iy + 2 + i| =$$

$$= |x + i(3-x) + 2 + i| = |(x+2) + i(4-x)| =$$

$$= \sqrt{(x+2)^2 + (4-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 4x + 20}$$

$$\text{Vi noterar att } \min_{x \in \mathbb{R}} (2x^2 - 4x + 20) = \min_{x \in \mathbb{R}} (2(x-1)^2 + 18) = 18$$

Av detta följer att

$$\max_{z \in \Gamma} \left| \frac{1}{z+2+i} \right| = \frac{1}{\sqrt{\min_{x \in \mathbb{R}} (2x^2 - 4x + 20)}} = \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Svar: $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

8) Se förra tentan.