

## MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys TMV170/MMGD30, 2018-06-05, TID(14.00-18.00)

Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare

Telefonvakt: ankn

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

---

**OBS:** Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.  
Ange kod på *varje* inlämnat blad.  
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.  
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Beräkna derivatan av funktionerna

$$f(x) = \frac{2 + \arctan x}{2 - \arctan x}$$

och

$$g(x) = \int_{\ln x}^{\ln x^2} \frac{\sin t}{t} dt$$

samt beräkna  $f'(1)$  och  $g'(e)$ . Förenkla så långt som möjligt.

(3+3p)

2. Lös differentialekvationen

$$(x^2 + 4)y' + 4xy = x.$$

(6p)

3. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = 5e^{-7x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

4. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 - \tan^2 x}.$$

(6p)

V.G.V.

5. Avgör för vilka  $p \in \mathbb{R}$  som integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)^p \cdot (\frac{1}{x}+1)^p} dx$$

konvergerar och för vilka  $p$  som integralen divergerar.

(6p)

6. Beräkna

$$\int_0^1 \frac{3+x+2x^2+x^4}{(1+x^2)^2(2+x)} dx.$$

(8p)

7. Beräkna absolutbeloppet för

$$1 + \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

(3p)

8. Sätt

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Låt P vara punkten med  $x$ -koordinaten  $h > 0$  på kurvan  $y = f(x)$ , och R punkten  $(0, f(0))$ . Beteckna med  $B(h)$  arean av den axelparallella rektangeln PQRS där S är punkten  $(0, f(h))$ . Låt  $A(h)$  beteckna arean av området i PQRS som ligger under grafen till  $f$ . Bestäm

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(h)}{B(h)}.$$

(8p)

Information om när tentan är färdiggrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK

Lösningsskisser till TMV170/MMGD30 den 5/6 2018

①  $f(x) = \frac{2 + \arctan x}{2 - \arctan x}$ ,  $g(x) = \int \frac{\ln x^2}{\ln x} \frac{\sin t}{t} dt$

Beräkna  $f'(x)$ ,  $g'(x)$  samt  $f'(1)$ ,  $g'(e)$ .

Lösning:  $f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot (2 - \arctan x) - (2 + \arctan x) \cdot (-\frac{1}{1+x^2})}{(2 - \arctan x)^2} =$

$= \frac{4}{(1+x^2) \cdot (2 - \arctan x)^2}$ ,  $f'(1) = \frac{4}{2 \cdot (2 - \frac{\pi}{4})^2} = \frac{32}{(8 - \pi)^2}$

$g'(x) = \frac{\sin(\ln x^2)}{\ln x^2} \cdot \frac{2}{x} - \frac{\sin(\ln x)}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$

$g'(e) = \frac{\sin(2)}{2} \cdot \frac{2}{e} - \frac{\sin(1)}{1} \cdot \frac{1}{e} = (\sin 2 - \sin 1) \cdot \frac{1}{e}$

Svar: Se ovan

② Lös  $(x^2 + 4)y' + 4xy = x$

Lösning:  $y' + \frac{4x}{x^2+4} y = \frac{x}{x^2+4}$  har den integrerande

faktorn  $\exp(\int \frac{4x}{x^2+4} dx) = \exp(2 \ln(x^2+4)) = (x^2+4)^2$

Multiplikation med  $(x^2+4)^2$  ger

$\frac{d}{dx} ((x^2+4)^2 \cdot y(x)) = x(x^2+4)$

Lös  $(x^2+4)^2 \cdot y(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + C$

Alltså  $y(x) = \frac{\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + C}{(x^2+4)^2}$

Svar:  $y(x) = \frac{\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + C}{(x^2+4)^2}$ ,  $C \in \mathbb{R}$

③ Lös  $\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = 5e^{-7x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Lösning: Den karakteristiska ekvationen  $0 = r^2 + 4r + 13 =$

$= (r+2)^2 + 3^2 = (r+2+3i)(r+2-3i)$  ger homogena lösningar

$y_h(x) = A e^{-2x} \cos(3x) + B e^{-2x} \sin(3x)$ . För att bestämma

en partikulärlösning  $y_p(x)$  antar vi  $y_p(x) = C e^{-7x}$ .

Derivering och insättning ger

$(49 - 28 + 13)C = 5$  dvs  $C = \frac{5}{34}$

Dåll ger  $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A e^{-2x} \cdot \cos(3x) + B e^{-2x} \cdot \sin(3x) + \frac{5}{34} e^{-7x}$

Villkoren  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$  bestämmer A och B.

Vi får

$$\begin{cases} 0 = A + \frac{5}{34} \\ 0 = -2A + 3B - \frac{35}{34} \end{cases} \quad \text{Lvs} \quad \begin{cases} A = -\frac{5}{34} \\ B = \frac{25}{102} \end{cases}$$

Svar:  $y(x) = -\frac{5}{34} e^{-2x} \cos(3x) + \frac{25}{102} e^{-2x} \sin(3x) + \frac{5}{34} e^{-7x}$

④ Beräkna  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 - \tan^2 x}$

Lösning: Vi har  $\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 - \tan^2 x} = \frac{\cos^2 x (x^2 - \sin^2 x)}{x^2 \cos^2 x - \sin^2 x}$

Standardutvecklingarna

$$\begin{cases} \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5) \\ \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6) \end{cases}$$

ger

$$\begin{aligned} x^2 \cos^2 x - \sin^2 x &= x^2 (1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4))^2 - (x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5))^2 \\ &= x^2 (1 - x^2 + O(x^4)) - (x^2 - \frac{1}{3}x^4 + O(x^6)) = \\ &= (-1 + \frac{1}{3})x^4 + O(x^6) = -\frac{2}{3}x^4 + O(x^6) \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \cos^2 x \cdot (x^2 - \sin^2 x) &= (1 + O(x^2))^2 (x^2 - (x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5))^2) = \\ &= (1 + O(x^2)) (x^2 - (x^2 - \frac{1}{3}x^4 + O(x^6))) = \\ &= (1 + O(x^2)) (\frac{1}{3}x^4 + O(x^6)) = \frac{1}{3}x^4 + O(x^6) \end{aligned}$$

Alltså  $\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 - \tan^2 x} = \frac{\frac{1}{3}x^4 + O(x^6)}{-\frac{2}{3}x^4 + O(x^6)} = \frac{1 + O(x^2)}{-2 + O(x^2)} \rightarrow -\frac{1}{2}, x \rightarrow 0$

Svar:  $-\frac{1}{2}$

⑤ Avgör konvergens/divergens för  $p \in \mathbb{R}$  för

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)^p (\frac{1}{x}+1)^p} dx$$

Lösning: Vi har  $(x+1)(\frac{1}{x}+1)^p = (2+x+\frac{1}{x})^p, x > 0$

Vidare gäller

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^q} dx \text{ konvergerar} \Leftrightarrow q > 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^q} dx \text{ konvergerar} \Leftrightarrow q < 1.$$

För  $x \in [1, \infty)$  gäller  $x < 2+x+\frac{1}{x} < x+3$  varför

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(2+x+\frac{1}{x})^p} dx \text{ konvergerar} \Leftrightarrow p > 1$$

där vi använt jämförelsekriteriet

För  $x \in (0, 1]$  gäller  $2 < 2+x+\frac{1}{x} (< \frac{1}{x}+3)$  varför för  $p > 1$

$\int_0^1 \frac{1}{(2+x+\frac{1}{x})^p} dx$  konvergerar  $\Leftrightarrow$  alla  $p > 1$ .

Alltså  $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)^p (\frac{1}{x}+1)^p} dx$  konvergerar om  $p > 1$  och divergerar om  $p \leq 1$

Svar: konvergens  $\Leftrightarrow p > 1$ .

(6) Beräkna  $\int_0^1 \frac{3+x+2x^2+x^4}{(1+x^2)^2(2+x)} dx$

Lösning: Partialbräckeruppdelning av integranden ger

$$\frac{3+x+2x^2+x^4}{(1+x^2)^2(2+x)} = \frac{A+Bx}{1+x^2} + \frac{C+Dx}{(1+x^2)^2} + \frac{E}{x+2} \quad (*)$$

Vi ser direkt att  $E = \frac{3-2+2(-2)^2+(-2)^4}{(1+(-2)^2)^2} = 1$

Sätt HL i (\*) på gemensamt bräkestreck. Vi får i följande

$$3+x+2x^2+x^4 = (A+Bx)(1+x^2)(x+2) + (C+Dx)(x+2) + (1+x^2)^2$$

Derivera på

$$x^4: 1 = B + 1 \Rightarrow B = 0$$

$$x^3: 0 = A + 2B \Rightarrow A = 0$$

$$x^2: 2 = 2A + B + D + 2 \Rightarrow D = 0$$

$$x^1: 1 = A + 2B + C + 2D \Rightarrow C = 1$$

$$x^0: 3 = 2A + 2C + 1 \quad \text{ok}$$

Alltså  $\int_0^1 \frac{3+x+2x^2+x^4}{(1+x^2)^2(2+x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx + \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

Här gäller

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2} dx = [\ln(x+2)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x}{2} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx =$$

$$= [\arctan x]_0^1 + \left[ \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

Svar:  $\ln \frac{3}{2} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ .

(7)  $z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . Beräkna  $|z|$  och  $\arg z$

Lösung:  $\operatorname{Re} z = 1 + \cos \theta$ ,  $\operatorname{Im} z = \sin \theta$  ✓

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} = \\ &= \sqrt{2 + 2 \cos \theta} = \sqrt{2 + 2(2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1)} = 2 \sqrt{\cos^2(\frac{\theta}{2})} = 2 |\cos \frac{\theta}{2}| \end{aligned}$$

⑧ se maars tenten 2018