

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys TMV170/MMGD30, 2018-03-15, TID(14.00-18.00)

Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare

Telefonvakt: Adam Malik, ankn 5325

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Beräkna derivatan av funktionerna

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

och

$$g(x) = \int_1^{\ln x} e^{t^2} dt$$

samt beräkna $f'(0)$ och $g'(e)$. Förenkla så långt som möjligt.

(3+3p)

2. Lös differentialekvationen

$$xy' \cos y + \sin y = 0, \quad 0 < x, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}.$$

(6p)

3. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^x(1+x^2) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

(7p)

4. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

(6p)

V.G.V.

5. Avgör för vilka $p \in \mathbb{R}$ som integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(x^p + 1)^3} dx$$

konvergerar och för vilka p som integralen divergerar.

(5p)

6. Beräkna

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2(x+1)} dx.$$

(8p)

7. Sätt

$$z = (\sqrt{3} - i)^{50} \cdot (1 - i\sqrt{3})^{30}.$$

Bestäm kvoten

$$\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}.$$

(4p)

8. Sätt

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Låt P vara punkten med x -koordinaten $h > 0$ på kurvan $y = f(x)$, och R punkten $(0, f(0))$. Beteckna med $B(h)$ arean av den axelparallella rektangeln PQRS där S är punkten $(0, f(h))$. Låt $A(h)$ beteckna arean av området i PQRS som ligger under grafen till f . Bestäm

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(h)}{B(h)}.$$

(8p)

Information om när tentan är färdiggrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK

(1) $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $g(x) = \int_1^{\ln x} e^{t^2} dt$
 Beräkna $f'(x)$, $g'(x)$ samt $f'(0)$, $g'(e)$.

Lösning:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(0) = 1$$

$$g'(x) = e^{(\ln x)^2} \cdot \frac{d}{dx} \ln x = e^{\ln x \cdot \ln x} \cdot \frac{1}{x} = (e^{\ln x})^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= x^{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$g'(e) = 1$$

Svar: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f'(0) = 1$, $g'(x) = x^{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$, $g'(e) = 1$

(2) $x y' \cos y + \sin y = 0$, $0 < x$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$

Lös differentialkvationen

Lösning: För $0 < x$ och $0 < y < \frac{\pi}{2}$ gäller

$$\frac{\cos y}{\sin y} \cdot y' = -\frac{1}{x} \quad \text{separabel diff-ekv}$$

Sätt $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(y) = \frac{\cos y}{\sin y}$. Primitiva funktioner till $f(x)$ resp. $g(y)$ ges av

$$F(x) = -\ln|x| = \ln\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0$$

$$G(y) = \ln|\sin y| = \ln(\sin y), \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}$$

Vi får

$$\ln(\sin y(x)) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln c, \quad c > 0$$

och alltså

$$\sin(y(x)) = \frac{c}{x}, \quad x \geq c > 0$$

$$\text{Alltså } y(x) = \arcsin\left(\frac{c}{x}\right), \quad x \in [c, \infty)$$

Svar: $y(x) = \arcsin\left(\frac{c}{x}\right)$, $x \in [c, \infty)$ där $c > 0$.

③ Lös $y'' + 2y' + y = e^x(1+x^2)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Lösning: Karakteristiska ekvationen

$$0 = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 \text{ ger } r_{1,2} = -1. \text{ Detta}$$

ger den allmänna homogena lösningen

$$y_h(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$$

Ansätt partikulärlösningen $y_p(x) = e^x \cdot z(x)$.

Derivering och insättning i diff-ekv ger

$$z'' + 2z' + z + 2(z' + z) + z = 1 + x^2$$

$$\text{dvs } z'' + 4z' + 4z = 1 + x^2. \text{ Ansätt } z(x) = ax^2 + bx + c$$

Derivering och insättning i diff-ekv ger

$$2a + 4 \cdot (2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) = 1 + x^2$$

$$\text{dvs } (4a-1)x^2 + (8a+4b)x + (2a+4b+4c-1) = 0 \text{ för alla } x$$

Alltså

$$\begin{cases} 4a-1=0 \\ 8a+4b=0 \\ 2a+4b+4c-1=0 \end{cases} \text{ vilket ger } \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{5}{8} \end{cases}$$

Detta ger

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + e^x \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{8} \right)$$

A, B bestäms av villkoren $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ dvs

$$\begin{cases} 0 = y(0) = A + \frac{5}{8} \\ 1 = y'(0) = -A + B + \frac{5}{8} - \frac{1}{2} \end{cases} \text{ vilket ger } \begin{cases} A = -\frac{5}{8} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Svar: $y(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{8} \right) + e^x \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{8} \right)$

④ Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Lösning: Vi gör omskrivningen

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \ln(\cos x)} \text{ där } 0 < |x|, |x| \text{ nära } 0.$$

Standardutvecklingarna

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4), \ln(1+x) = x + O(x^2)$$

ger

$$\frac{1}{x^2} \cdot \ln(\cos x) = \frac{1}{x^2} \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^4)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^4)\right) = -\frac{1}{2} + o(x^2)$$

Alltså $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2} + o(x^2)} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}, x \rightarrow 0$

Svar: $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

- ⑤ Avgör för vilken $p \in \mathbb{R}$ som $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x^p+1)^3} dx$ konvergerar och för vilken $p \in \mathbb{R}$ som integralen divergerar.

Lösning: Vi vet att för $q \in \mathbb{R}$ gäller

$$\int_1^{\infty} x^q dx \text{ konvergent} \iff q < -1.$$

För $p \leq 0$ gäller

$$\frac{1}{(x^p+1)^3} \geq \frac{1}{(1+1)^3} = \frac{1}{8} \text{ för } x \geq 1$$

Alltså gäller $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x^p+1)^3} dx$ divergent för $p \leq 0$.

Anlag $p > 0$: Då

$$\frac{1}{8x^{3p}} \leq \frac{1}{(x^p+1)^3} \leq \frac{1}{x^{3p}} \text{ för } x \geq 1$$

ger jämförelsesatsen för generaliserade integraler

$$\text{att } \int_1^{\infty} \frac{1}{(x^p+1)^3} dx \text{ är konvergent} \iff -3p < -1$$

$$\iff p > \frac{1}{3}.$$

Svar: konvergerar för $p > \frac{1}{3}$ och divergerar för $p \leq \frac{1}{3}$.

- ⑥ Beräkna $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2(x+1)} dx$.

Lösning: Partialbråkuppdelningsansats

$$\frac{1}{(1+x^2)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{ger } 1 = A \cdot (x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x+1) + (Dx+E)(x+1)$$

$$\text{dvs } (A+B)x^4 + (B+C)x^3 + (2A+C+B+D)x^2 + (B+C+D+E)x + (A+C+E-1) = 0 \quad \text{all } x \in \mathbb{R}$$

dvs

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ 2A+C+B+D=0 \\ B+C+D+E=0 \\ A+C+E=1 \end{cases} \quad \text{vi får} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \\ C = \frac{1}{4} \\ D = -\frac{1}{2} \\ E = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Detta ger

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2(x+1)} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{-x+1}{1+x^2} dx + \\ + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-x+1}{(1+x^2)^2} dx ;$$

Här gäller

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \\ \int_0^1 \frac{-x+1}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \\ = -\frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 + [\arctan x]_0^1 = \\ = -\frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) + (\arctan 1 - \arctan 0) = \\ = \ln(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{\pi}{4}$$

och

$$\int_0^1 \frac{-x+1}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \\ = -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1+x^2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \\ = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{4} + \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

Slutligen

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx - \int_0^1 x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} dx \\ = \left\{ \text{se ovan} \right\} = \frac{\pi}{4} - \left\{ \left[x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{1+x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{1+x^2} dx \right\} = \\ = \frac{\pi}{4} - \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right\} = \\ = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$$

Detta ger den sökta integralens värde

$$\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} \left(\ln \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \right) = \\ = \frac{1}{4} \left(\ln 2 + \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{8} = \\ = \frac{1}{8} \ln 2 + \frac{\pi}{8}$$

Svar: $\frac{1}{8} \ln 2 + \frac{\pi}{8}$

⑦ $z = (\sqrt{3} - i)^{50} \cdot (1 - i\sqrt{3})^{30}$ Bestäm $\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$

Lösning: Vi noterar att

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

$$1 - \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

Alltså gäller

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}-i)^{50} \cdot (1-i\sqrt{3})^{30} &= 2^{80} \left(-50 \cdot \frac{\pi}{6} - 30 \cdot \frac{\pi}{3}\right) i = \\ &= 2^{80} \cdot e^{i \frac{5\pi}{3}} = 2^{80} \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)\end{aligned}$$

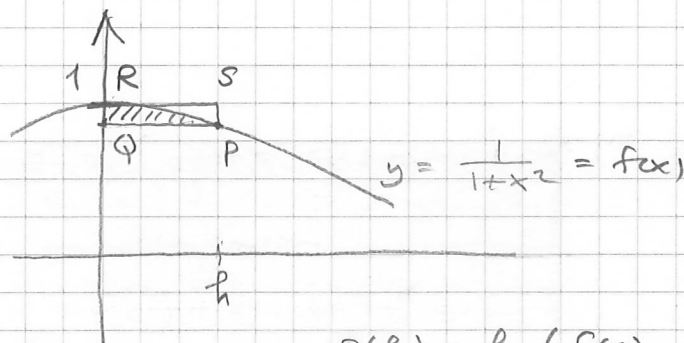
Här gäller $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Di $\operatorname{Re} z = 2^{80} \cdot \frac{1}{2}$ och $\operatorname{Im} z = 2^{80} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ får

$$\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Svar: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

- ⑧ Beräkna $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(h)}{B(h)}$ där $B(h)$ är arean av axelparallella rektangeln PQRS och $A(h)$ är arean av det skuggade området



P: $(h, f(h))$

R: $(0, f(0))$

Q: $(0, f(h))$

S: $(h, f(0))$

$$\begin{aligned}B(h) &= h \cdot (f(0) - f(h)) = \frac{h^3}{1+h^2}, \quad h > 0 \\ A(h) &= \int_0^h (f(x) - f(h)) dx = \int_0^h \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+h^2}\right) dx = \\ &= \left[\arctan x - \frac{1}{1+h^2} \cdot x\right]_0^h = \arctan h - \frac{h}{1+h^2}.\end{aligned}$$

Detta ger, för $h > 0$,

$$\frac{A(h)}{B(h)} = \frac{(1+h^2)\arctan h - h}{h^3}$$

För att beräkna gränsvärdet Taylorutvecklar vi $\arctan h$ kring 0. Vi noterar att $\arctan h$ är en udda funktion ($i h$) och alltså

$$\arctan h = ah + bh^3 + O(h^5)$$

där $a = f'(0)$, $b = \frac{f'''(0)}{6}$. Lita kullerklor ger

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^4} \left[-2(1+x^2)^2 - (-2x) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x\right], \quad f'''(0) = -2$$

Delta gel

$$\begin{aligned}\frac{A(h)}{B(h)} &= \frac{1}{h^3} \left((1+h^2) \left(h - \frac{1}{3}h^3 + O(h^5) \right) - h \right) = \\ &= \frac{1}{h^3} \left(h + \frac{2}{3}h^3 + O(h^5) - h \right) = \\ &= \frac{2}{3} + O(h^2) \rightarrow \frac{2}{3}, h \rightarrow 0+.\end{aligned}$$

Son: $\frac{2}{3}$