MATEMATIK
Chalmers
Tentamen
Examinator: Alexey Geynts,

Datum: 2022-01-05. Tid: eftermiddag (kl. 14:00-18:00)
Inga hjälpmedel är tillåtna. Telefoner är förbjudna.
telefonvakt - Alexey Geynts, 0731431174

Tenta i MVE585/TMV157 i Inledande matematik

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Till följande uppgifter (a) till (f) skall kortfattade lösningar inlämnas. De ger totalt 16 poäng.

1. (a) Beräkna följande gränsvärden: **(3p)**

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$

Lösning. Uttrycket som vi undersöker här är av typ $\left[\frac{0}{0}\right]$. Vi försöker tillämpa L'Hopitals regel.

$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $\quad \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x$;

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2x\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Svar: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-x\right)$

Lösning. Uttrycket som vi undersöker här är av typ $[\infty-\infty]$.

Vi löser det med att först multiplicera och dela uttrycket $\left(\sqrt{1+x+x^2}-x\right)$ med dess konjugat $\left(\sqrt{1+x+x^2}+x\right)$ och förenklar resultatet. Sedan delar vi täljaren och nämnaren med x och beräknar gränsvärdet.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{1+x+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x+x^2}+x\right)}{\left(\sqrt{1+x+x^2}+x\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x+x^2-x^2}{\left(\sqrt{1+x+x^2}+x\right)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{\left(\sqrt{1+x+x^2}+x\right)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1/x+1}{\left(\sqrt{1/x^2+1/x+1}+1\right)}\right)$$

$=\frac{0+1}{\sqrt{0+0+1}+1} = \frac{1}{2}$, eftersom $1/x^2 \to 0$, och $1/x \to 0$ då $x\to\infty$.

Svar: $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-x\right) = \frac{1}{2}$

(b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet. **(4p)**

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$$

Lösning. Vi använder Gauss elimination för systemets matris $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 2 & 3 \\ 3 & -8 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ för att få fram en ekvivalent trappstegsmatris:

$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & -8 & 4 & 9 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 2 & 3 \\ 3 & -8 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 4 & -5 & -6 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 & -6 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 11 & 22 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Gauss - Jordans bakåtelimination för att få fram en reducerad trappstegsmatris:

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -7 \end{bmatrix} - (-4)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix} - (-4)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Svar. Ekvationssystemet har en entydig lösning $(3, 1, 2)$.

(c) Bestäm om vinkeln mellan vektorer $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ och $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ är spetsig eller trubbig. **(1p)**

Lösning. Om $\cos(\theta) > 0$ så är $0 \leq \theta \leq \pi$ en spetsig vinkel: $0 \leq \theta < \pi/2$, och om $\cos(\theta) < 0$ så är θ en trubbig vinkel: $\pi/2 < \theta \leq \pi$. Detta medför att vinkeln θ mellan vektorer $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{w}$ är spetsig i fall skalära produkten $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} > 0$ och är trubbig i fall $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} < 0$ eftersom $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{w}|\cos(\theta)$.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = (1)(2) + (-2)(-3) + (5)(-2) = 2 + 6 - 10 = -2 < 0$$

Svar. Vinkeln θ mellan vektorer $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{w}$ är trubbig eftersom $|\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{w}|\cos(\theta) < 0$.

(d) Bestäm definitionsmängden och värdemängden av funktionen $g(x) = \sqrt{\arcsin(x)}$. Visa att den är inverterbar. **(3p)**

Lösning. Definitionsmängden till arcsin är $[-1, 1]$, värdemängden för arcsin är $[-\pi/2, \pi/2]$.

$\arcsin(x) < 0$ för $x \in [-1, 0)$ och $\arcsin(x) \geq 0$ för $x \in [0, 1]$.

Värden av $\arcsin(x)$ för $x \in [0, 1]$ utgör intervallet $[0, \pi/2]$

Definitionsmängden till $\sqrt{\ldots}$ är $[0, \infty)$. Detta tillsammans med egenskaper till arcsin ovan, medför att definitionsmängden till $g(x) = \sqrt{\arcsin(x)}$ är $[0, 1]$.

Värdemängden till $g(x)$ består av de värden som $\sqrt{\arcsin(x)}$ antar för $x \in [0, 1]$, eller de värden som $\sqrt{y}$ antar för $y \in [0, \pi/2]$. Det betyder att värdemängden till $g(x)$ är intervallet $\left[0, \sqrt{\pi/2}\right]$. Funktionen $g(x) = \sqrt{\arcsin(x)}$ är inverterbar eftersom den är en sammansatt funktion av två monotont växande funktioner arcsin och $\sqrt{}$ och är därför monoton själva.

Svar. Värdemängden till $g(x)$ är intervallet $\left[0, \sqrt{\pi/2}\right]$. $g(x)$ är inverterbar eftersom den är en monoton funktion.

(e) Bestäm tangentlinjen till kurvan med ekvationen $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ i punkten (x_0, y_0) där $x_0 = \dfrac{1}{8}$ och $y_0 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{3/2}$. **(3p)**

Lösning.

Vi beräknar implicit derivata av y med avseende på x från ekvationen för kurvan: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y'(x) &= 0 \\
x^{-1/3} + y^{-1/3}y'(x) &= 0 \\
y'(x) &= -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} \\
y'(x_0) &= -\frac{y_0^{1/3}}{x_0^{1/3}} = -\frac{\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2}\right)^{1/3}}{\left(\frac{1}{8}\right)^{1/3}} = \\
-\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{1/2}}{\left(\frac{1}{2}\right)} &= -\frac{2}{2}\sqrt{3} = -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Lutningen av tangentlinjen i punkten (x_0, y_0) är $m = -\sqrt{3}$.

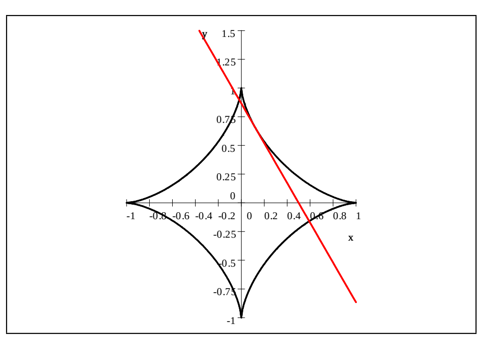
Svar. Ekvationen för tangentlinjen i punkten på linjen där $x = x_0 = \frac{1}{8}$ är:

$y = y_0 + m(x - x_0) = \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} - \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{8}\right)$

Vi kan förenkla det uttrycket vidare : $y = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3 + \sqrt{3}}{8} - \sqrt{3}x =$

$= \frac{(3+1)\sqrt{3}}{8} - \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}x.$

Svar. Ekvationen för tangentlinjen i givna punkten är $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}x.$



(f) Beräkna derivatan till funktionen $f(x) = \arctan(x^2)\sin(2x)$ **(2p)**

Lösning.

$\frac{d}{dx}\left(\arctan(x^2)\sin(2x)\right) = \sin(2x)\frac{d}{dx}\left(\arctan(x^2)\right) + \arctan(x^2)\frac{d}{dx}\left(\sin(2x)\right)$

$\frac{d}{dx}\left(\arctan(x^2)\right) = \frac{2x}{x^4+1}$; $\frac{d}{dx}\left(\sin(2x)\right) = 2\cos 2x$;

$\frac{d}{dx}\left(\arctan(x^2)\sin(2x)\right) = \sin(2x)\frac{2x}{x^4+1} + \arctan(x^2)2\cos(2x)$

Till följande uppgifter skall **fullständiga** lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.**

2. (a) Bestäm minimala avståndet mellan punkten $(2, -1, 0)$ och linjen given med ekvationer på normal form: $\frac{x-4}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-1}{2}$. **(4p)**

Lösning. Minimala avståndet s mellan en punkt med ortsvektorn $\overrightarrow{r_0}$ och en linje genom punkten med ortsvektorn $\overrightarrow{r_1}$ och med riktningsvektorn $\overrightarrow{v}$ kan beräknas med formeln:

$$s = |(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}) \times \overrightarrow{v}|\,\frac{1}{|\overrightarrow{v}|}$$

$$\overrightarrow{r_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix};\ \overrightarrow{r_0} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix};\ \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix},\ |\overrightarrow{v}| = \sqrt{3^2+4^2+2^2} = \sqrt{29}$$

$$\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}) \times \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \overrightarrow{i}\det\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \overrightarrow{j}\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \overrightarrow{k}\det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -8\overrightarrow{i} - 1\overrightarrow{j} + 14\overrightarrow{k} = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

$$|(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}) \times \overrightarrow{v}| = \left\| \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ 14 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{64+1+196} = \sqrt{261}$$

Svar. $s = \sqrt{\frac{261}{29}} = \sqrt{9} = 3.$

(b) Skriv en ekvation för planet som går genom skärningslinjen av planen med ekvationer $4x - y + 3z - 1 = 0$ och $x + 5y - z + 2 = 0$, och genom punkten $(1, 1, 1)$.

Tips. Använd konstruktionen med pencil of planes (knippe plan på svenska) **(4p)**

Lösning. Vi betraktar en ekvation för olika plan genom skärningslinjen av två givna plan. Den ekvationen heter pencil of planes på engelska.

$$(4x - y + 3z - 1) + \lambda\,(x + 5y - z + 2) = 0$$

Den ekvationen framställer alla plan genom den skärningslinjen förutom planet

$x + 5y - z + 2 = 0.$

Vi söker ett värde för λ sådant att ekvationen ovan ger planet genom punkten $(1,1,1)$ och givna skärningslinjen. Sätt in $(x,y,z)=(1,1,1)$ i ekvationen för pencil of planes och lös ut λ :

$$(4\cdot 1-1+3\cdot 1-1)+\lambda\,(1+5\cdot 1-1+2)=7\lambda+5=0$$

Detta ger $\lambda=-5/7$ och planet med ekvationen

$$(4x-y+3z-1)+(-5/7)\,(x+5y-z+2)=0$$

Det är lämpligt att multiplicera ekvationen med 7 för att få ett snyggare uttryck.

$$7\,(4x-y+3z-1)+(-5)\,(x+5y-z+2)=23x-32y+26z-17=0$$

Svar. $23x-32y+26z-17=0$

3. Betrakta funktionen $g(x)=\sqrt{x}e^{-x}$

(a) Bestäm dess definitionsmängd, kritiska punkter, singulära punkter, lokala extrempunkter, intervall där funktionen är växande och avtagande, globalt maximum och globalt minimum (om de existerar). **(3p)**

(b) Bestäm böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konvex och konkav. **(3p)**

(c) Rita en skiss av grafen till funktionen. **(2p)**

Lösning.

(a)) Definitionsmängden $\mathcal{D}\,(g)=[0,\infty)$ eftersom $\sqrt{x}$ är odefinierad för negativa x.

g är kontinuerlig som produkt av två kontinuerliga funktioner.

$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}e^{-x}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2}e^{-x}-\sqrt{x}e^{-x}=\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(e^{-x}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}$

$x=0$ är en singulär punkt eftersom derivatan är odefinierad, men funktionen är kontinuerlig.

Det finns en kritisk punkt $x=1/2$. Derivatan ändrar tecken i den punkten från plus till minus.

Detta medför att funktionen g far ett lokalt maximum i den punkten. Funktionen är växande på intervallet $[0,1/2)$ och är avtagande på intervallet $(1/2,\infty)$.

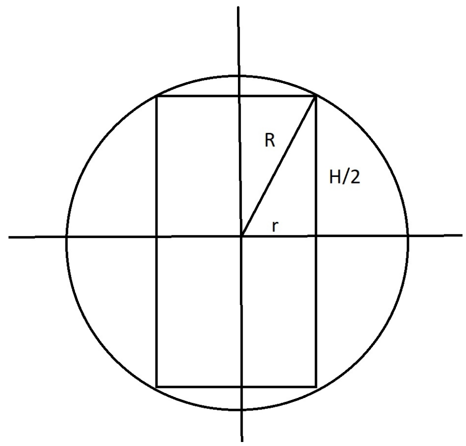
$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}e^{-x}=0$ enligt egenskaper hos exponentfunktionen. Detta medför att g har ett globalt maximum i $x=1/2$.

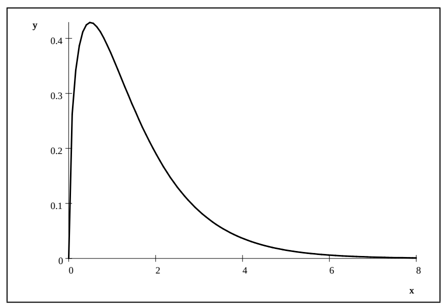
Funktionen g har ett globalt minimum 0 i rand och singulärpunkten $x=0$.

(b) Vi beräknar andra derivatan: $\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{x}e^{-x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2}e^{-x}-\sqrt{x}e^{-x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}e^{-x}-x^{1/2}e^{-x}\right)=$
$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2}e^{-x}-\frac{1}{2}x^{-1/2}e^{-x}-\frac{1}{2}x^{-1/2}e^{-x}-\left(-x^{1/2}e^{-x}\right)=\frac{1}{4}\frac{1}{x^{3/2}}\left(-1-4x+4x^2\right)\left(e^{-x}\right)=$
$=\frac{1}{4}\frac{1}{x^{3/2}}\left(4x^2-4x-1\right)\left(e^{-x}\right)$

Andra derivatan är noll i de punkter där $4x^2-4x-1=0$. Lösningar till den ekvationen är: $x_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ och $x_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}<0$. Andra roten x_2 ligger utanför definitionsmängden. $d''(x)<0$ för $x\in(0,x_1)$ där g är konkav, och $d''(x)>0$ för $x\in(x_1,\infty)$ där g är konvex. Punkten x_1 är en böjningspunkt.

(c) Grafen till $\sqrt{x}e^{-x}$:





4. Bestäm radien av den cylindern inskriven i en sfär med radien R, som har maximala möjliga volumen. Beräkna den volumen. **(6p)**

Lösning. Vi betraktar sfären med centrum i origo och radien R.Vi betraktar också en inskriven cylinder med höjden H. Pythagorsatsen medför att cylinderns radie r måste satisfiera relationen

$$\left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2 = R^2$$

Volumen av den cylindern är lika med $V = \pi r^2 H$

Vi uttrycker H i termer av r:

$$H = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

Detta ger ett uttryck av cylinderns volum i termer av r.

$$V(r) = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$$

Värdena $r = 0$ och $r = R$ svarar mot volum $V = 0$ med en oändligt tunn cylinder och en helt flat cylinder. Det är ett naturligt minimum av volumen.

Vi söker radien r av cylindern sådan att volumen är maximal.

$$\frac{d}{dr}V(r) = \frac{d}{dr}\left(2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}\right) = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2} - 2\pi \frac{r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

Vi adderar dessa två uttryck och får:

$$\frac{d}{dr}V(r) = 2\pi \left(2R^2 - 3r^2\right) \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

Funktionen $V(r)$ har två kritiska punkter: $r_1 = 0$, $r_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}R$. Derivatan är positiv för $r \in \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}R\right)$ och är negativ för $r \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}R, R\right)$. Radien $r = R$ är en singulär punkt för $V(r)$.

Detta medför svaret:

Svar: Volumen $V(r)$ av inskriven cylinder har ett globalt maximum i $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$. Maximala möjliga volumen är

$$V_{\max} = 2\pi\frac{2}{3}R^2\sqrt{R^2 - \frac{2}{3}R^2} = \pi\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}R^3$$

5. Bestäm definitionsmängden och alla asymptoter till grafen av funktionen

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - x}.$$

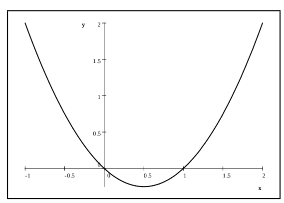
Skissa grovt funktionens graf och dess asymptoter. **(6p)**

Lösning.

Nämnaren har två rötter: $x = 0$ och $x = 1$. Detta medför att $D(f)$ hela reella axeln förutom punkterna $x = 0$ och $x = 1$.

Detta ger två lodräta asymptoter $x = 0$ och $x = 1$.

Nämnaren $x^2 - x$ har grafen



som illustrerar att $0 < x^2 - x$ för $x < 0$, $x^2 - x < 0$ för $0 < x < 1$ och $0 < x^2 - x$ för $1 < x$.

Täljaren $2x^3 - 3x^2 - x + 3|_{x=0} = 3 > 0$, $2x^3 - 3x^2 - x + 3|_{x=1} = 1 > 0$.

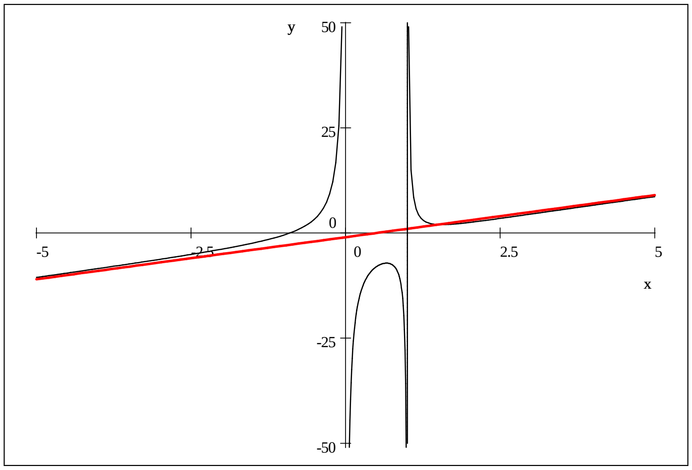
Detta medför att $\lim_{x\to 0-} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 1+} f(x) = \infty$.

Det finns en sned asymptot $y = ax + b$ till funktionen då $x \to \pm\infty$ eftersom täljaren har graden 3 och nämnaren har graden 2.

$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3-3x^2-x+3}{x(x^2-x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3-3x^2-x+3}{x^3-x^2} = 2$

$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3-3x^2-x+3}{x^2-x} - 2x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3-3x^2-x+3-2x\left(x^2-x\right)}{x^2-x} =$
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3-3x^2-x+3-2x^3+2x^2}{x^2-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2-x+3}{x^2-x} = -1$

Sneda asymptoten till funktionen f har ekvationen $y = 2x-1$. Grafen ser ut som följande figur:



6. (a) Ange definitionen för en kontinuerlig funktion. **(1p)**

(b) Formulera och bevisa satsen om att en funktion deriverbar i en punkt a måste vara kontinuerlig i den punkten. **(5p)**

Lösning.

(a) Definition. En funktion f definierad i punkten a och runt den punkten är kontinuerlig i punkten a i fall $\lim_{x\to a} f(x)$ existerar och $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(b) Sats. Om funktionen f är deriverbar i punkten x_0, så är den kontinuerlig i punkten x_0.

Bevis. Derivatans definition medför att följande gränsvärden existerar:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

Vi betraktar följande gränsvärde.

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) = ???$$

Om det är lika med noll:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) = 0$$

är det ekvivalent med att $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ och att f är kontinuerlig enligt definitionen.

Vi tillämpar multiplikationsegenskaper för gränsvärden i första steget och derivatans definition i andra steget:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}(x-x_0) = \\
\left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}\right)\left(\lim_{x\to x_0} (x-x_0)\right) &= \\
f'(x_0)\cdot 0 &= 0
\end{aligned}$$

Detta medför genom additionsregeln för gränsvärden att

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)) = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$$

Det betyder enligt definitionen att funktionen f är kontinuerlig.

$\blacksquare$

Maxpoäng på tentan är 50.

Betyggränser för poäng på tentamen, inklusive eventuella bonuspoäng är: **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40.

Lösningar läggs ut på kursens sida i Canvas. Resultat meddelas via Ladok.