MATEMATIK
Chalmers
Tentamen
Examinator: Alexey Geynts,

Datum: 2021-10-28. Tid: förmiddag (kl. 8:30-12:30)
Inga hjälpmedel är tillåtna. Telefoner är förbjudna.
telefonvakt - Alexey Geynts, 0731431174

Tenta i MVE585/TMV157 i Inledande matematik

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Till följande uppgifter (a) till (f) skall kortfattade lösningar inlämnas. De ger totalt 16 poäng.

1. (a) Beräkna följande gränsvärden: **(3p)**

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan(x^2)}{\tan(2x^2)}$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

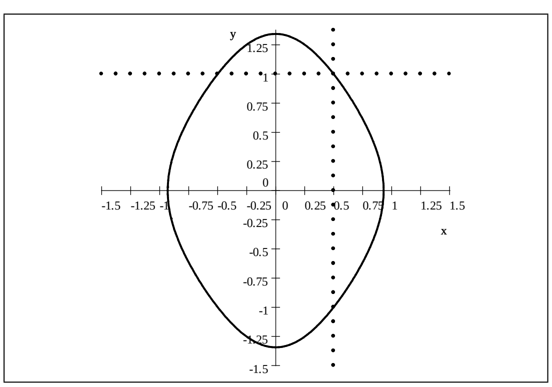
(b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet. **(4p)**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

(c) Beräkna skalära projektionen av vektorn $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$ på vektorn $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. **(2p)**

(d) Bestäm definitionsmängden och värdemängden av funktionen $g(x) = \ln(\arctan(x))$. Visa att den är inverterbar. **(2p)**

(e) Bestäm tangentlinjen till kurvan$x^2 + (\arctan(y))^2 = \left(\dfrac{\pi^2}{16} + \dfrac{1}{4}\right)$ i punkten $(\dfrac{1}{2}, 1)$. **(3p)**



(f) Beräkna derivatan till funktionen $f(x) = \sin^2(x)e^{\cos(x)}$ **(2p)**

Till följande uppgifter skall **fullständiga** lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.**

2. (a) Bestäm minimala avståndet mellan punkten $(1, -1, 1)$ och linjen given med ekvationer på normal form: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$ **(4p)**

   (b) Skriv en ekvation för planet som går genom punkten $(2, 1, 3)$ och utgör likadana vinklar med alla basvektorer $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Beräkna minimala avståndet från det planet till origo. **(4p)**

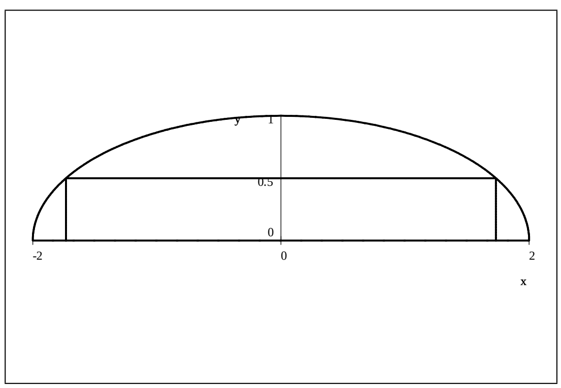
3. Betrakta funktionen $g(x) = \sqrt{x}e^{-x^2}$.

   (a) Bestäm dess definitionsmängd, kritiska punkter, singulära punkter, lokala extrempunkter, globalt maximum och globalt minimum (om de existerar). **(3p)**

   (b) Bestäm böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konvex och konkav. **(3p)**

   (c) Rita en skiss av grafen till funktionen. **(2p)**

4. Bestäm en rektangel, inskriven i övre halvan av ellipsen med ekvationen $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, sådan att rektangeln har största möjliga arean (se bilden). Beräkna den största möjliga arean av rektangeln. **(6p)**



5. Bestäm definitionsmängden och asymptoter till grafen av funktionen $f(x) = \frac{2x^3+x^2-3x-4}{x^2+x-2}$. Skissa grovt funktionens graf och dess asymptoter. **(6p)**

6. Låt a, L, $M \in \mathbb{R}$. Låt f, g vara funktioner definierade på $\mathbb{R}$.

   (a) skriv ned den formella matematiska definitionen av $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. **(1p)**

   (b) Visa att om $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ och $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ så existerar $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x))$ och $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M$. **(5p)**

Maxpoäng på tentan är 50.

Betygsgränser för poäng på tentamen, inklusive eventuella bonuspoäng är: **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40.

Lösningar läggs ut på kursens sida i Canvas. Resultat meddelas via Ladok.