MATEMATIK
Chalmers
Tentamen
Examinator: Alexey Geynts,

Datum: 2021-10-28. Tid: förmiddag (kl. 8:30-12:30)
inga hjälpmedel är tillåtna.
telefonvakt - Alexey Geynts, 0731431174

Lösningsförslag till tenta i MVE585/TMV157 i Inledande matematik

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Till följande uppgifter (a) till (f) skall kortfattade lösningar inlämnas. De ger totalt 16 poäng.

1. (a) Beräkna följande gränsvärden:

Lösning. **(3p)**

$$\text{(i) } \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^2)}{\tan(2x^2)} \overset{'Hopital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{1+x^4}\right)2x}{\left(\frac{1}{\cos^2(2x^2)}4x\right)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{1+x^4}\right)}{\left(\frac{1}{\cos^2(2x^2)}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{(ii) } \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)\right)^2 \overset{\text{s tan dartgränsvärde}}{=} e^2$$

Standarta gränsvärdet beräknas som : $\lim_{y\to 0}\left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right) = \lim_{y\to 0}\exp\left(\frac{\ln(1+y)}{y}\right) =$

$= \exp\left(\lim_{y\to 0}\left(\frac{\ln(1+y)}{y}\right)\right) \overset{l'Hopital}{=} \exp\left(\lim_{y\to 0}\left(\frac{\frac{1}{1+y}}{1}\right)\right) = \exp(1) = e.$

Det givna gränsvärdet kunde också beräknas direkt på samma sätt.

(b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet. **(4p)**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Lösning. Utvidgade matrisen till systemet reduceras till trappstegmatrisen genom Gauss och Gauss-Jordan elimination :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 12 \\ 1 & -4 & 3 & -22 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 11 & -11 & 66 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Systemet har en entydig lösning: $(1, 5, -1)$

(c) Beräkna skalära projektionen av vektorn $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$ på vektorn $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. **(2p)**

Lösning. Projektionen är: $p = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} \left(\frac{1}{|\overrightarrow{w}|} \right)$.

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1; \quad |\overrightarrow{w}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$ Projektionen är $P = \frac{1}{3}$.

(d) Bestäm definitionsmängden och värdemängden av funktionen $g(x) = \ln(\arctan(x))$. Visa att den är inverterbar. **(2p)**

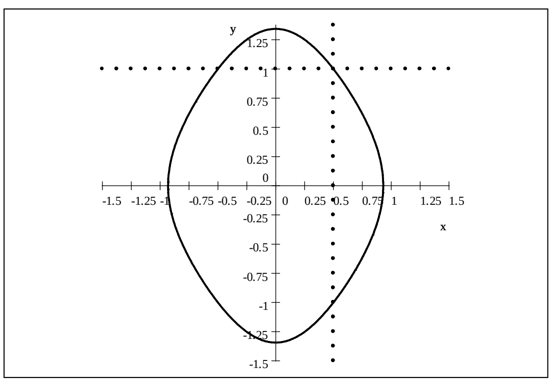
Lösning. Definitionsmängden är $\mathcal{D}(g) = (0, \infty)$ eftersom $\arctan(x) \leq 0$ för $x \leq 0$ och $\ln(x)$ är odefinierad för $x \leq 0$.

$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \pi/2$. Detta medför att $\lim_{x\to\infty} g(x) = \ln(\pi/2)$.

$\lim_{x\to 0+} \arctan(x) = 0$. Detta medför att $\lim_{x\to 0+} g(x) = -\infty$. Värdemängden av g är intervallet $\mathcal{R}(g) = (-\infty, \ln(\pi/2))$.

$g(x)$ är en monoton växande funktion eftersom den är en sammansättning av två monotona funktioner och är därför inverterbar.

(e) Bestäm tangentlinjen till kurvan $x^2 + (\arctan(y))^2 = \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}\right)$ i punkten $(\frac{1}{2}, 1)$. **(3p)**



Lösning. Vi beräknar derivatan av kurvans ekvation med en implicit funktion $y = y(x)$: $2x + 2\arctan(y(x))\frac{1}{1+y^2(x)}y'(x) = 0$. Sätt in koordinater av punkten $(x, y(x)) = (\frac{1}{2}, 1)$.

$2\frac{1}{2} + 2\arctan(1)\frac{1}{1+1}y'(x) = 0$, eller $1 + \arctan(1)y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $\quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{\arctan(1)} = \frac{-4}{\pi}$.

Det är tangentens lutning i punkten $(\frac{1}{2}, 1)$.

Ekvationen för tangentlinjen är:

$$y = 1 - \frac{4}{\pi}(x - 1/2).$$

(f) Beräkna derivatan till funktionen $f(x) = \sin^2(x)e^{\cos(x)}$ **(2p)**

Lösning. $\frac{d}{dx}\left(\sin^2(x)e^{\cos(x)}\right) = 2\sin(x)\cos(x)e^{\cos(x)} + \sin^2(x)e^{\cos(x)}(-\sin(x)) =$

$= \left(\sin(2x) - \sin^3(x)\right)e^{\cos(x)}$.

Till följande uppgifter skall **fullständiga** lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.**

2. (a) Bestäm minimala avståndet mellan punkten $(1, -1, 1)$ och linjen given med ekvationer på normal form: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$ **(4p)**

Lösning. Minimala avståndet s mellan en punkt med ortsvektorn $\overrightarrow{r_0}$ och en linje genom punkt $\overrightarrow{r_1}$ med riktningsvektorn $\overrightarrow{v}$ kan beräknas med formeln:

$$s = |(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}) \times \overrightarrow{v}| \frac{1}{|\overrightarrow{v}|}$$

$$(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}) \times \overrightarrow{v} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = -2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k};$$

$|(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}) \times \overrightarrow{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$. $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$. Sökta avståndet är $s = \frac{3}{3} = 1$.

(b) Skriv en ekvation för planet som går genom punkten $(2, 1, 3)$ och utgör likadana vinklar med alla basvektorer $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$. Beräkna minimala avståndet från det planet till origo. **(4p)**

Lösning.

Planet som utgör likadana vinklar med alla basvektorer $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ måste ha normalen $\overrightarrow{n}$ som också utgör likadana vinklar med alla basvektorer. Detta medför att normalens skalära projektioner på alla koordinataxlar som är faktiskt normalens komponenter är likadana. Längden av normalen spelar ingen roll så vi kan välja normalens komponenter alla lika med 1 (eller -1):

$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $|\overrightarrow{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

Detta medför att planets ekvation är

$$1(x - 2) + 1(y - 1) + 1(z - 3) = 0$$

Avståndet mellan planet $Ax+By+Bz-D = 0$ och origo är lika med $s = |D| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. I vårt konkreta fall

$$s = |(0 - 2) + (0 - 1) + (0 - 3)| / |\overrightarrow{n}| = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

3. Betrakta funktionen $g(x) = \sqrt{x}e^{-x^2}$.

Lösning.

(a) Bestäm dess definitionsmängd, kritiska punkter, singulära punkter, lokala extrempunkter, globalt maximum och globalt minimum (om de existerar). **(3p)**

$D(g) = [0, \infty)$.

$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}e^{-x^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x^2} - 2x^{3/2}e^{-x^2} = \frac{1-4x^2}{2\sqrt{x}}e^{-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(1-2x)(1+2x)e^{-x^2}0$

Singulär punkt $x_1 = 0$. Kritiska punkten inom definitionsmängden är $x_2 = \frac{1}{2}$.

Derivatan $g'(x)$ är positiv för $0 < x < 1/2$ och är negativ för $x > 1/2$. Funktionen är då växande på intervallet $[0, 1/2)$ och är avtagande på intervallet $(1/2, \infty)$. Detta gör att funktionen g har ett localt maximum i x_2.

$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. $g(0) = 0$.Detta medför att funktionen g har ett globalt minimum noll i singulära randpunkten $x_1 = 0$ och ett globalt maximum i $x_2 = 1/2$.

$g_{\max} = \sqrt{1/2}e^{-1/4}$

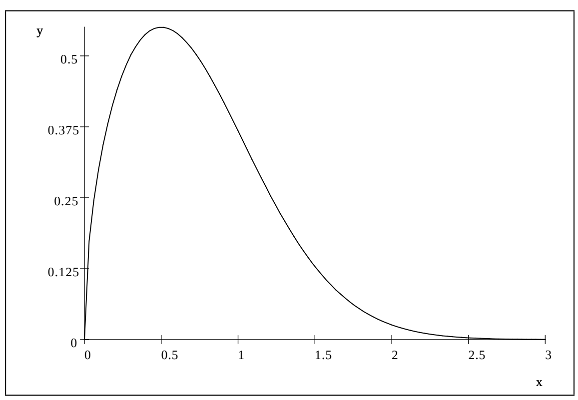
(b) Bestäm böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konvex och konkav. **(3p)**

$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{x}e^{-x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x^2} - 2x^{3/2}e^{-x^2}\right) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}e^{-x^2} - \sqrt{x}e^{-x^2} - 3\sqrt{x}e^{-x^2} + 4x^{5/2}e^{-x^2} =$

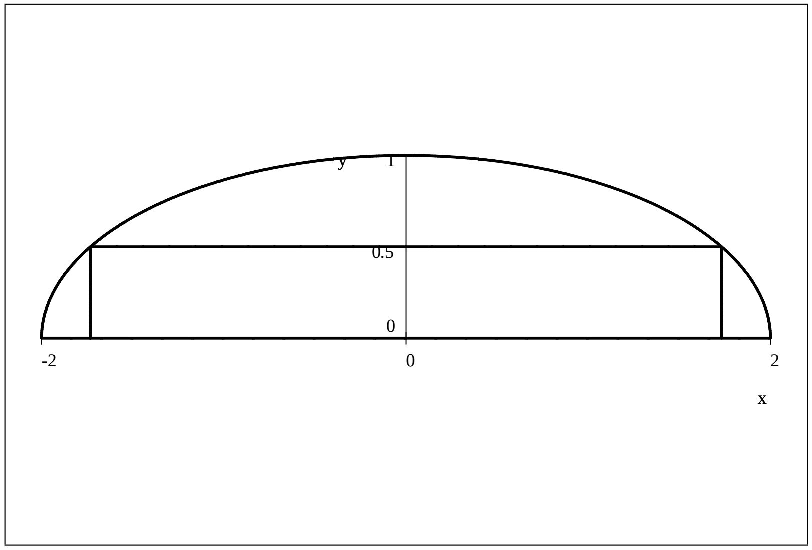
$= e^{-x^2}\left(-\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} - 4\sqrt{x} + 4x^{5/2}\right) = \frac{e^{-x^2}}{4x^{\frac{3}{2}}}\left(16x^4 - 16x^2 - 1\right) = 0$

Vi sätter $y = x^2 \geq 0$ och löser ekvationen $16y^2 - 16y - 1 = 0$. Den har rötter $y_1 = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{2} > 0$ och $y_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{2} < 0$. Bara y_1 ingår i definitionsmängden och ger en böjningspunkt $x_3 = \sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{2}}$ där andra derivatan ändrar tecken. Funktionen g är konvex för $0 < x < x_3$ och är konkav för $x_3 < x$.

(c) Rita en skiss av grafen till funktionen. **(2p)**



4. Bestäm en rektangel, inskriven i övre halvan av ellipsen med ekvationen $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, sådan att rektangeln har största möjliga arean (se bilden). Beräkna den största möjliga arean. **(6p)**



Lösning.

Beteckna halvan av längden av botten i rektangeln med x och höjden med h. Arean är lika med $A = 2xh$. Från ellipsens ekvation följer det att $\frac{x^2}{4} + h^2 = 1$ och $h(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. Detta ger uttrucket av arean som funktion av x:

$$A(x) = 2x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

$A(x)$ är definierad på ett begränsat slutet intervall $[0, 2]$ och är kontinuerlig funktion. Den måste anta sitt maximala värde på det intervallet enligt max-min satsen. En singulär punkter är randpunkt $x = 2$. Vi söker kritiska punkter.

$\frac{d}{dx}A(x) = \frac{d}{dx}\left(2x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right) = 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}}\left(2 - x^2\right).$

Kritisk punkt i intervallet $(0, 2)$ är $x_0 = \sqrt{2}$. Derivatan $\frac{d}{dx}A(x)$ är positiv på intervallet $[0, \sqrt{2}]$, och är negativ på intervallet $[\sqrt{2}, 2)$. Detta medför att arean av rektangeln $A(x)$ antar globalt maximum $A_{\max}$ då $x = \sqrt{2}$ och $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$.Maximal area är:

$$A_{\max} = 2\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{2}{4}} = 2$$

5. Bestäm definitionsmängden och asymptoter till grafen av funktionen $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 3x - 4}{x^2 + x - 2}$. Skissa grovt funktionens graf och dess asymptoter. **(6p)**

Lösning.

Vi bestämmer rötter av nämnaren i uttrycket för $f(x)$. Polynomet $Q(x) = x^2 + x - 2$, har rötter $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

Detta gör att definitionsmängden till f är reella axeln $\mathbb{R}$ förutom dessa två punkter.

Funktionen har två lodräta asymptoter i $x = -2$ och i $x = 1$.

Nämnaren $Q(x)$ är negativ för $-2 < x < 1$ och är positiv för $x < -2$ och $x > 1$.

Täljaren $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 4$ är negativ i dessa två punkter: $P(1) = 2+1-3-4 = -4 < 0$; $P(-2) = -16+4+6-4 = -10 < 0$. Detta medför följande gränsvärden:

$$\lim_{x\to -2-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to -2+} f(x) = \infty; \quad \lim_{x\to 1-} f(x) = \infty; \quad \lim_{x\to 1+} f(x) = -\infty$$

Det finns en sned asymptot efterom täljaren har grad 3 än nämnaren har grad 2.

Man kan hitta asymptoten genom att dela $2x^3 + x^2 - 3x - 4$ med $x^2 + x - 2$:

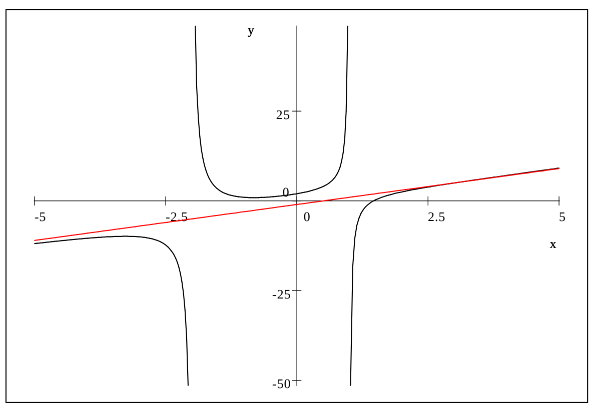
$$\frac{2x^3 + x^2 - 3x - 4}{x^2 + x - 2} = 2x - 1 + \frac{2x - 6}{x + x^2 - 2}$$

Vi observerar att $f(x) - (2x-1) = \frac{2x-6}{x+x^2-2} \to 0$ då $x \to \pm\infty$. Asymptoten har ekvationen $y = 2x - 1$.

Alternativt, kan man hitta lutningen som gränsvärdet $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{2x^3 + x^2 - 3x - 4}{x\,(x^2 + x - 2)} =$ 2.

Föfluttnignen av asymptoten hittas som gränsvärdet: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^3 + x^2 - 3x - 4}{x^2 + x - 2} - 2x = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{(x^2 - x + 4)}{x^2 + x - 2} = 1.$

Asymptoten har ekvationen $y = 2x - 1$. Skissen av grafen följer undersökta asymptoter och gränsvärden.



6. Låt a, L, $M \in \mathbb{R}$. Låt f, g vara funktioner definierade på $\mathbb{R}$.

(a) skriv ned den formella matematiska definitionen av $\lim_{x\to a} f(x) = L$. **(1p)**

(b) Visa att om $\lim_{x\to a} f(x) = L$ och $\lim_{x\to a} g(x) = M$ så existerar $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ och $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M$. **(5p)**

Lösning.

(a) Definitionen av gränsvärde.

För en funktion f definierad runt punkten a men kanske inte i själva punkten och ett tal L påståendet $\lim_{x\to a} f(x) = L$ betyder att

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ sådan att $\forall x$: $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$ gäller det att $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(b) Kolla beviset av satsen i **Adams, Example 4. sid. 90,** eller i föreläsningsanteckningar.

Maxpoäng på tentan är 50.

Betyggränser för poäng på tentamen, inklusive eventuella bonuspoäng är: **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40.

Lösningar läggs ut på tentamens sida och på kursens sida i Canvas. Resultat meddelas via Ladok.