MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157)
Tid: 2020-01-08, kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Morgan Görtz, tel ankn 5325, 031-7725325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2019 inkluderas.) Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida: www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv157/1920/

OBS: Även för uppgift 1) skall nu (kortare, motiverande) svar inlämnas.

1. Till denna uppgift ska du endast lämna in **kortfattade lösningar och svar**. Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) i) Skriv utan att använda trigonometriska funktioner, $e^{-i\pi/3}e^{i\pi/2}$ på sin Cartesiska form $a+ib$ där $a, b \in \mathbb{R}$, ii) Skriv $-3\sqrt{3}+3i$ på polär form $re^{i\theta}$, iii) För vilka $z \in \mathbb{C}$ gäller $z^3 = -i$. (3p)

   b) För vilka värden på $x \in \mathbb{R}$ gäller $|x-2| < |x|$? (2p)

   c) Bestäm om möjligt minsta värdet av $f(x) = \ln(x+2) + \dfrac{1}{x}$ på intervallet $(0, \infty)$. (2p)

   d) i) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x \arctan 3x}$, ii) Beräkna utan att använda ℓ'Hôpitals regel, gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-x-6}$. (2p)

   e) Bestäm om möjligt för vilket eller vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ som ekvationssystemet $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & a & a \\ a & 0 & 1 & 3 \\ a & -a & 1 & 2a \end{array}\right)$ har i) tre lösningar, ii) oändligt många lösningar. (3p)

   f) Formulera och bevisa Triangelolikheten för reella tal, både uppåt och nedåt. (2p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar med motiveringar.

2. i) Bestäm om möjligt ekvationen för det plan som är vinkelrätt mot planen $x - y + z = 2$ och $x - 2z = 1$ och som innehåller punkterna (1, 1, 1) och (1, -1, 7). (2p)

   ii) Bestäm om möjligt ekvationen för det plan som är vinkelrätt mot planen $x - y + z = 2$ och $x - 2z = 1$ och som innehåller punkterna (1, 1, 1) och (1, -1, 0). (2p)

   iii) Bestäm om möjligt ekvationen för det plan som är vinkelrätt mot planen $x - y + 2z = 2$ och $3x - 3y + 6z = 1$ och som innehåller punkterna (1, 1, 1) och (1, -1, 0). (2p)

3. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2}{x^2+x-2}$. Ange definitionsmängd D_f, värdemängd V_f och alla eventuella lokala extrempunkter, singulära punkter och asymptoter. Redogör för var funktionen växer respektive avtar. Konvexitet/konkavitet behöver ej utredas. Är funktionen omvändbar? (6p)

Var god vänd!

4. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x \to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 1} x^3$ och bevisa sedan med den i a) just givna definitionen, att ditt beräknade gränsvärde är korrekt. (2p)

   c) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 0} e^{2x}$ och bevisa sedan med den i a) just givna definitionen, att ditt beräknade gränsvärde är korrekt . **Ledning**: Medelvärdessatsen kan vara användbar. (2p)

5. Funktionen $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin x - \ln(1+x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ är kontinuerlig i x=0. Den är även deriverbar där; bestäm $f'(0)$? (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående av en totalsumma om sex poäng; att enbart ange 'sant' eller 'falskt' ger ingen poäng. (6p)

   a) När funktionen f är kontinuerlig på intervallet $(0, 1)$ så har den inget största värde och heller inget minsta värde på intervallet.

   b) Ortsvektorerna $v_1 = (-1, 1, 2)$, $v_2 = (1, 2, 1)$ och $v_1 = (-2, 1, 1)$ ligger i samma plan.

   c) När f är kontinuerlig på $[a, b]$ med $a < b$, deriverbar på (a, b) och $|f'(x)| > 2$ för alla $x \in (a, b)$ så gäller att $|f(b) - f(a)| > 2|b - a|$.

7. a) Formulera Satsen om mellanliggande värde (den behöver ej bevisas), (1p)

   b) Formulera Medelvärdessatsen (den behöver ej bevisas), (1p)

   c) Antag $a < b$ och att f är definierad på det öppna intervallet (a, b), och att f har ett extremvärde i en punkt $c \in (a, b)$. Visa att om $f'(c)$ existerar så är $f'(c) = 0$. (4p)

VA