1

i) $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{3\pi-2\pi}{6}} = e^{i\pi/6}$

$= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}$

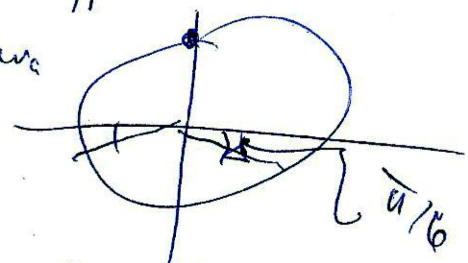
ii) $-3\sqrt{3}+3i = \frac{|-3\sqrt{3}+i3|}{|-3\sqrt{3}+3i|}\left(-3\sqrt{3}+3i\right)$

$= \frac{\sqrt{27+9}}{6}\left(-3\sqrt{3}+i3\right)$

$= 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = 6\,e^{(5\pi/6)i}$

iii) Tredje graden så tre lösningar (på enhetscirkeln) – så vinkeln mellan rötterna är $\frac{2\pi}{3} = 2\cdot 60° = 120°$

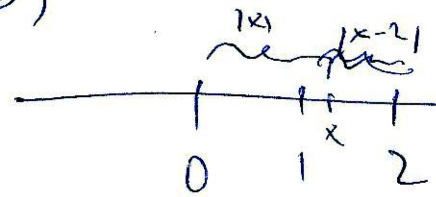
En lösning är uppenbarligen $z=i$ så de andra måste vara



$\pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ och

[illegible] lös annars som blomma

b)



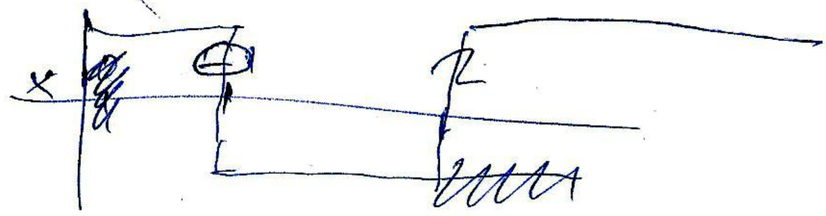
$\Rightarrow x > +1$

g/

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-(x+2)}{x^2(x+2)} =$

$x>0$:

$= \dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2(x+2)}$



så $x=2$ minimumpunkt och

$f(2) = \ln 4 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 2\ln 2$ är

minimivärdet

d) i) l'H: $= \dfrac{-2\sin(2x)}{\arctan 3x + x\dfrac{3}{1+(3x)^2}} =$

$= -2\,(1+9x^2)\dfrac{\sin 2x}{(1+9x^2)\arctan(3x) + 3x} =$

$\Rightarrow -2\,(1+9x^2)\dfrac{2\cos 2x}{18x\arctan 3x + \dfrac{1+9x^2}{1+9x^2}\cdot 3 + 3}$

$\longrightarrow \dfrac{-2\cdot 2}{0+3+3} = \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3}$

ii) $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-x-6} = \dfrac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x+2)} \to -\frac{1}{5}$ då $x \to 3$

e) i) Ekvationssystem har aldrig ~~oändligt~~ precis tre lösningar. 3/

ii) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & a & a \\ a & 0 & 1 & 3 \\ a & -a & 1 & 2a \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & a & a \\ 0 & a & 0 & 3-2a \\ 0 & 0 & 2-a^2 & -3-a^2+6a \end{array}\right)$$

Inga lösningar då $a=0$ och/eller $a=\pm\sqrt{2}$

Unik —"— då $a\neq 0$ och $a\neq\pm\sqrt{2}$

iii) Inga $a\in\mathbb{R}$ ger oändligt många lösn.

---

f) $||x|-|y|| \le |x+y| \le |x|+|y|$

Bevis: $\pm x \le |x|$ och $\pm y \le |y|$ ger $\pm(x+y) \le |x|+|y| \Rightarrow$

$|x+y| \le |x|+|y|$. Från ovan: $|x| = |x+y-y| \le$

$\le |x+y| + |-y| = |x+y|+|y| \Rightarrow |x|-|y| \le |x+y|$

Byt x mot $y \Rightarrow |y|-|x| \le |y+x| = |x+y| \Rightarrow$

$\pm(|x|-|y|) \le |x+y| \Rightarrow ||x|-|y|| \le |x+y|$ $\boxtimes$

2) a) Sökt plan har normal $n=(1,-1,1)\times(1,0,-2)=$

$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (2,3,1)$; så planets

4/

ekvation är $2x+3y+z=d$ och då $(1,1,1)$ ligger i planet så är $d=6$ ∴ Sökta plan måste vara $2x+3y+z=6$ ~~men~~ och detta plan innehåller ~~...~~ $(1,-1,7)$ så ~~...~~ uppfyller villkoren

b) ~~Planet $2x+3y+z=6$ uppfyller villkoren ty~~

Sökt plan ∄ ty måste vara $2x+3y+z=6$ om $(1,1,1)$ ska ligga i efterfrågat plan men $(1,-1,0)\notin$ planet

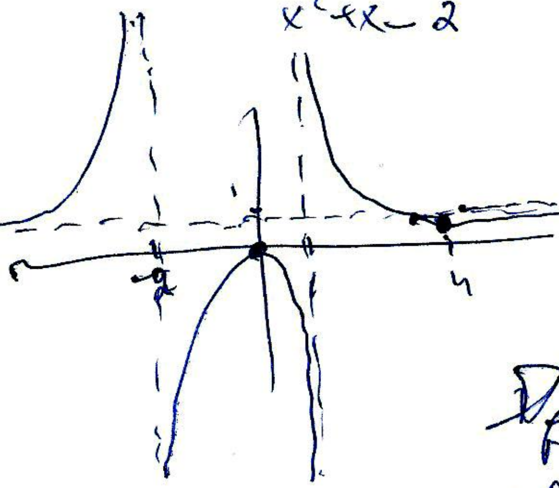
c) Sökt plan $ax+by+cz=d$ och de givna planen är parallella så $(a,b,c)\cdot(1,-1,2)=0$ för sökt plan // med bägge planen. Insättning av $(1,1,1)$ och $(1,-1,0)$ ger då ekv system $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & d \\ 1 & -1 & 0 & d \end{array}\right)$ för a, b och c och detta ekv. syst.

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 5d \\ 0 & 4 & 0 & d \\ 0 & 0 & 2 & -d \end{array}\right)$ där d måste $\neq 0$ som då leder

till $5x+y-2z=4$

5

3) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+x-2} = 1 - \frac{x-2}{(x+2)(x-1)}$



$f(4) = \frac{8}{9} < 1$ lokalt min.

$f(0) = 0$ — " — max

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

$V_f = (-\infty, 0] \cup [8/9, \infty)$

---

4) a) falsk b) givet $\varepsilon > 0$ välj t.ex. $\delta = \min(\varepsilon/7, 1)$

c) Medelvärdessatsen ger att givet $\varepsilon > 0$ att ~~t.ex.~~ väljer $\delta = \frac{1}{2}\min(\varepsilon/e, 1)$ funkar

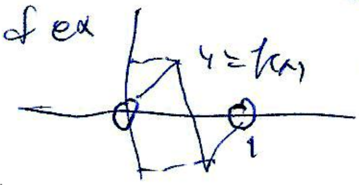
---

5) $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - \ln(1+x) - x}{x^2}$

och upprepade applikationer av l'Hôpital ger $= 1/2$

---

6) a) t.ex.



$\Rightarrow$ ej sant, F

b) $v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -(-3), -3) = 3(1,-1,1) \not\parallel (-2,3,1)$

så F

c) MVS $\Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ så $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \Rightarrow$

$\frac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|} = |f'(\xi)| > 2$ så S

---

7) Se [illegible]