MATEMATIK **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 140116 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: John Bondestam Malmberg
0703-088304

TMV142 Linjär algebra Z

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2013 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida under eftermiddagen den 16:e. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar utom onsdag 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -10 & 14 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas för $\operatorname{Col} A$. (2p)

(b) Bestäm en bas för $\operatorname{Nul} A$. (2p)

(c) Ange $\operatorname{rank} A$ och $\dim \operatorname{Nul} A$. (1p)

3. Låt $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, där $\mathbf{t} \neq 0$. Förklara varför $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{t}$ *inte* är en linjär avbildning. (2p)

4. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -9 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvärden till A (2p)

(b) Bestäm alla egenvektorer till A. (2p)

(c) Är A diagonaliserbar? I så fall, diagonalisera A. (2p)

Var god vänd!

5. (a) Definiera vad som menas med en minstakvadratlösning till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (1p)

(b) Bestäm den linje $p(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ som är bäst anpassat till punkterna $(-1, 0), (0, -2), (1, -2), (2, 2)$ enligt minstakvadratmetoden. (3p)

(c) Bestäm även felet $||\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}||$ i minstakvadratlösningen till ekvationsystemet som uppkommer i del (b). (1p)

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Låt $\mathbf{v}$ vara vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}^t$ i $\mathbb{R}^2$, och låt $L = \text{span}\{\mathbf{v}\}$ vara linjen som spänns upp av $\mathbf{v}$.

(a) Ta fram projektionen av vektorerna $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^t$ och $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^t$ på linjen L. (2p)

(b) Om $\mathbf{p}$ är projektionen av en vektor $\mathbf{w}$ på L, så ges speglingen $\mathbf{s}$ av $\mathbf{w}$ kring L av $\mathbf{s} = 2\mathbf{p} - \mathbf{w}$. Ta fram speglingen av vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ kring linjen L. (1p)

(c) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som först speglar en vektor kring linjen L och sedan speglar kring x-axeln. Ta fram standardmatrisen för avbildningen T. (2p)

(d) Avbildningen T ovan kan beskrivas som en rotation. Vad är rotationsvinkeln? (2p)

7. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är Falskt så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet. (6p)

(a) Om A och B är $n \times n$-matriser, och B är inverterbar, så är $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$.

(b) En 3×3 matris har linjärt oberoende kolonner om och endast om den har linjärt oberoende rader (där raderna betraktas som kolonnvektorer).

(c) En 3×2 matris har linjärt oberoende kolonner om och endast om den har linjärt oberoende rader (där raderna betraktas som kolonnvektorer).

8. (a) Definiera vad som menas med att en mängd av vektorer är en ortogonal mängd och en ortonormal mängd. (2p)

(b) Bevisa att om $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ är en ortogonal mängd, så är $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ linjärt oberoende. (3p)

Lycka till!
Peter H

Anonym kod	TMV142 Linjär algebra Z 140116	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm för vilka h som vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & h \end{bmatrix}^t$ är en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Skriv den allmänna lösningen till ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x_1 + \ 2x_2 + \qquad 5x_4 = 5 \\ \qquad\qquad x_3 + \ 2x_4 = 1 \\ \qquad\qquad 3x_3 + \ 4x_4 = 5 \end{cases} .$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm volymen av parallellopippedet som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 \end{bmatrix}^t$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}^t$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \end{bmatrix}^t$ i $\mathbb{R}^3$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(d) Låt $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$ vara baserna $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \{\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^t\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\} = \{\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^t\}$ för $\mathbb{R}^2$. Antag att $\mathbf{v}$ har koordinaterna $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^t$ i basen $\mathcal{B}$. Bestäm koordinaterna $(\mathbf{v})_{\mathcal{C}}$ för $\mathbf{v}$ i basen $\mathcal{C}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lös matrisekvationen $(2A + X)B^{-1} = I_2$ där I_2 är 2×2-enhetsmatrisen.

Lösning:

....

(f) Bestäm stabila-tillståndsvektorn (steady-state vector) för den stokastiska matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.35 \\ 0.45 & 0.65 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....