Tentamen
TMV140 Linjär algebra Z

130117 kl. 08.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Dawan Mustafa, 0703 088 304

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

För godkänt på tentamen krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor och Matlab 2012 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter 130117. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(a) Avgör om $\mathbf{v}$ tillhör nollrummet $\operatorname{Nul} A$. (1p)

(b) Avgör om $\mathbf{v}$ tillhör kolonnrummet $\operatorname{Col} A$. (2p)
Skriv i så fall $\mathbf{v}$ som en linjärkombination av A:s kolonner.

(c) Bestäm baser för $\operatorname{Col} A$ och $\operatorname{Nul} A$. (3p)

3. Visa först att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning då (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Bestäm sedan minsta kvadrat-lösningen till ekvationssystemet ovan.

4. Låt (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen A har egenvärdena -2 och 2 (och inga fler). Bestäm en ON-bas för $\mathbb{R}^4$ av egenvektorer till A.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T \right\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$. I denna bas är $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ avbildningsmatris för den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. (6p)

Bestäm $T(\mathbf{v})$ (i standardbas) då $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T$ (också i standardbas).

6. Låt $\mathbb{P}_3$ vara vektorrummet av polynom av grad högst 3. Låt U_1 vara det underrum av $\mathbb{P}_3$ vars element är alla polynom p som uppfyller $p(-1) = p(1)$. Låt U_2 vara det underrum av U_1 vars element dessutom uppfyller $p(1) = 0$. Visa att $\dim U_1 = 3$ och $\dim U_2 = 2$. (6p)

Bestäm en bas $\{p_1, \ p_2\}$ för U_2, fyll ut den till en bas $\{p_1, \ p_2, \ p_3\}$ för U_1 och slutligen till en bas $\{p_1, \ p_2, \ p_3, \ p_4\}$ för hela $\mathbb{P}_3$.

7. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är Falskt så får du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet.

(a) Låt n vara ett positivt heltal. För alla $n \times n$ matriser A och B gäller att $\text{Rank}(AB) \leq \text{Rank}(B)$. (2p)

(b) Om A och B är matriser så att $A^2 = B^2$ så är $A = B$ eller $A = -B$. (2p)

(c) Om A och B är inverterbara matriser så att $A+B$ är inverterbar, så är även $A^{-1}+B^{-1}$ inverterbar. (2p)

Lycka till!
Peter Hegarty

Anonym kod	TMV140 Linjär algebra Z 130117	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Lös ekvationen (3p)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Lösning:

Svar: ....

(b) Låt

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}, \quad \mathcal{V} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

Bestäm de tre koordinatbytesmatriserna (basbytesmatriserna) $P_{\mathcal{U}}$ (samma som $\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{U}}{P}$), $\underset{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{E}}{P}$ och $\underset{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}}{P}$ från basen $\mathcal{U}$ till standardbasen $\mathcal{E}$ i $\mathbb{R}^2$, från standardbasen $\mathcal{E}$ till basen $\mathcal{V}$ och från basen $\mathcal{U}$ till basen $\mathcal{V}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

VÄND!

(c) Ange LU-faktoriseringen av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Hur kan du kontrollera att faktoriseringen är korrekt?

Lösning:

Svar: ....

(d) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & a & b \end{bmatrix}$. Bestäm a och b så att $\dim(\operatorname{Nul} A) = 2$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Lös matrisekvationen $XA = B + 2X$, där (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

Lösningar TMV140, Linjär Algebra Z, 130117

1. (a) Upprepade radoperationer ger

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = -2(x+2),$$

så lösningen är $x = -2$.

(b) Matrisen $P_{\mathcal{U}}$ har vektorerna i $\mathcal{U}$ som kolonner, dvs $P_{\mathcal{U}} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Matrisen $\underset{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{E}}{P}$ är inversen till mostvarande matris för V, dvs $\underset{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{E}}{P} = \left[\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]^{-1} = \frac{1}{2}\left[\begin{smallmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Slutligen är $\underset{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}}{P} = \underset{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{E}}{P}\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{U}}{P} = \frac{1}{2}\left[\begin{smallmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$

(c) Det räcker att göra en radoperation:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = U.$$

På vanligt sätt läser vi av $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$. Vi kan nu kontrollera att $LU = A$.

(d) Upprepade radoperationer ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & a & b \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & a+3 & b-7 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att det finns två icke-pivot-kolonner, dvs $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 2$, om och endast om $a = -3$, $b = 7$.

(e) Ekvationen kan skrivas $X(A - 2I) = B$, så $X = B(A - 2I)^{-1}$, förutsatt att $A - 2I$ är inverterbar. Men så är fallet:

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Alltså är

$$X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Vi observerar att $A\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, så $\mathbf{v}$ ligger ej i nollrummet.

(b) Vi vill skriva $\mathbf{v} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4$, där $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]$. Detta är ett system med totalmatris

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 5 & -2 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -9 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Systemet är lösbart, så $\mathbf{v}$ ligger i kolonnrummet. Varje val av x_3 ger en lösning, exempelvis ger $x_3 = 0$ att $\mathbf{v} = 4\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_4$.

(c) Vi ser i räkningen ovan att $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$ är pivotkolonner. Dessa bildar en bas för kolonnrummet. Ersätter vi högerledet med $\mathbf{0}$ ser vi att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har lösningarna $\mathbf{x} = x_3[9\ -6\ 1\ 0]^T$. Alltså är $[9\ \ -6\ 1\ 0]^T$ en bas för nollrummet.

3. Systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

och saknar alltså lösning. Vi beräknar

$$A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Normalekvationerna $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ har då totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 12 & 4 & -4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right],$$

så minsta kvadrat-lösningen är $[1 \;\; -2 \;\; 5]^T$.

4. Vi börjar med att bestämma en ortogonal bas för rummet av egenvektorer med egenvärdet 2. Egenvärdesekvationen $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ har koefficientmatris

$$A - 2I \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och är alltså ekvivalent med ekvationen $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$. Tre linjärt oberoende vektorer som uppfyller denna är $\mathbf{u}_1 = [1 \; 1 \; 0 \; 0]$, $\mathbf{u}_2 = [1 \; 0 \; 1 \; 0]$, $\mathbf{u}_3 = [1 \; 0 \; 0 \; 1]$. Vi tillämpar Gram-Schmidts metod, och får $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$,

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} = \frac{1}{2}[1 \;\; -1 \;\; 2 \;\; 0]^T,$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} = \frac{1}{3}[1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; 3]^T.$$

Enligt spektralsatsen är egenrummet med egenvärdet -2 ortogonalt mot $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$. Men det enda icke-triviala underrummet med denna egenskap är normalen, det vill säga linjen som spänns upp av $\mathbf{v}_4 = [-1 \; 1 \; 1 \; 1]^T$. (Man kan naturligtvis också se detta genom att lösa ekvationen $A\mathbf{x} = -2\mathbf{x}$.)

Enligt ovan är $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ en ortogonal bas för $\mathbb{R}^4$. Med $\mathbf{w}_j = \mathbf{v}_j/|\mathbf{v}_j|$ får vi svaret

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1\,1\,0\,0]^T, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}[1\,-1\,2\,0]^T, \quad \mathbf{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}[1\,-1\,-1\,3]^T, \quad \mathbf{w}_4 = \frac{1}{2}[-1\,1\,1\,1]^T.$$

5. Låt $P = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$ vara basbytesmatrisen från standardbasen till $\mathcal{B}$ och M den i uppgiften givna matrisen. För att beräkna $T(\mathbf{v})$ multiplicerar vi först $\mathbf{v}$ med P^{-1} för att komma till $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, därefter med M för att komma till $[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}$ och slutligen med P för att komma till $T(\mathbf{v})$ i standardbas. Den sökta vektorn är alltså $PMP^{-1}\mathbf{v}$. Observera att det är onödigt att beräkna P^{-1}. I stället radreducerar vi

$$[P|\mathbf{v}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

vilket ger $P^{-1}\mathbf{v} = [1\ \ -2\ 1]^T$. Vi beräknar sedan $T(\mathbf{v}) = PM[1\ \ -2\ 1]^T = [0\ \ -8\ 6]^T$.

6. Vi identifierar polynomet $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ med vektorn $[a\ b\ c\ d]^T \in \mathbb{R}^4$. Villkoret $p(1) = p(-1)$ ger $b + d = 0$ och villkoret $p(1) = 0$ ger $a + b + c + d = 0$. Vi skall alltså visa att lösningsmängden U_1 till

$$a + b + c + d = 0$$

har dimension 3. Detta är självklart; vi kan välja b, c, d godtyckligt och sedan lösa ut a. Vidare har lösningsmängden U_2 till

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ b + d = 0 \end{cases}$$

dimension 2. Detta är också klart (ingen elimination krävs). Med c och d som fria variabler får vi $[a\ b\ c\ d]^T = c[-1\ 0\ 1\ 0]^T + d[0\ \ -1\ 0\ 1]^T$. Alltså kan vi ta $p_1 = [-1\ 0\ 1\ 0]^T = x^2 - 1$, $p_2 = [0\ \ -1\ 0\ 1]^T = x^3 - x$ som bas för U_2. Vi kan välja p_3 som vilken vektor som helst med $a + b + c + d = 0$ men $b + d \neq 0$, till exempel $p_3 = [-1\ 1\ \ -1\ 1] = x^3 - x^2 + x - 1$. Slutligen väljer vi p_4 som vilken vektor som helst med $a + b + c + d \neq 0$, till exempel $p_4 = [1\ 0\ 0\ 0]^T = 1$.

7. (a) Om $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ så är $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dvs $\mathrm{Nul}(B) \subseteq \mathrm{Nul}(AB)$. Speciellt är $\dim(\mathrm{Nul}(B)) \leq \dim(\mathrm{Nul}(AB))$. Observera att B och AB har lika många kolonner, säg n stycken. Rangsatsen ger då $n - \mathrm{rank}(B) \leq n - \mathrm{rank}(AB)$, det vill säga $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(B)$. Påståendet är alltså Sant.

(b) Påståendet är Falskt. Matriserna $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ ger ett motexempel.

(c) Påståendet är Sant. Man kan skriva $A^{-1} + B^{-1} = B^{-1}(A + B)A^{-1}$, så påståendet följer av att produkten av inverterbara matriser är inverterbar. (Vi ser även att $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$.)