Tentamen
TMV140 Linjär algebra Z

120827 kl. 08.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Adam Wojciechowski, telefon: 0703-088304

Hjälpmedel: Inga

För godkänt på tentamen krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor och Matlab 2012 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 respektive 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 120828. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok cirka tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s expedition.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) För vilka parametervärden p är följande ekvationssystem lösbart för varje högerled? (3p)

$$\begin{cases} x_1 + (p-1)x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ px_1 + 2x_2 + px_3 &= b_3 \end{cases}$$

(b) Välj ett parametervärde för vilket systemet i (a) är lösbart endast för vissa högerled och beskriv vilka villkor b_1, b_2, b_3 måste uppfylla för att systemet skall vara lösbart. (3p)

3. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en ortogonal bas till nollrummet för A. (3p)

(b) Bestäm den vektor i A:s nollrum som har minst avstånd till vektorn $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Beräkna också detta minimala avstånd. (3p)

4. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ har vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som egenvektor.

(a) Bestäm talet a och matrisens samtliga egenvärden och egenvektorer. (3p)

(b) För a som i (a), lös systemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, med $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. (3p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Om godkäntgränsen ej är uppnådd kommer överbetygsdelen inte att rättas. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Betrakta de fyra punkterna $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,a)$ där a är en reell parameter. Visa att den linje som bäst ansluter till de givna punkterna (i minstakvadratmetodens mening) alltid går genom punkten $(-1/3, 1/2)$ oavsett vilket värde man sätter på a. (6p)

6. Låt V vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2 med reella koefficienter. Definiera en avbildning $T : V \to V$ genom

$$T(p) = p(1) + tp'(1) + t^2 p''(1).$$

(a) Visa att T är en linjär avbildning. (2p)

(b) Bestäm avbildningsmatrisen för T relativt basen $\{1, t, t^2\}$ för V. (2p)

(c) Vad blir avbildningsmatrisen då vi tar basen $\{1, 2+t, t^2\}$ för V istället? (2p)

7. (a) Definiera vad som menas med en linjärt oberoende mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$. Bevisa att fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ inte kan vara linjärt oberoende. (3p)

(b) Antag att A är en $n \times n$-matris och att det finns en vektor $\mathbf{x}$ sådan att $A^2\mathbf{x} \neq 0$ medan $A^3\mathbf{x} = 0$. Visa att vektorerna $\mathbf{x}$, $A\mathbf{x}$ och $A^2\mathbf{x}$ är linjärt oberoende. (3p)

Motivera väl.

Lycka till!
Peter Hegarty

Anonym kod	TMV140 Linjär algebra Z 120827	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats. Endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas.

(a) Bestäm alla värden på a så att

$$\begin{vmatrix} 2a & a & a \\ 2a & a & 1 \\ 3a+1 & a+1 & 2a \end{vmatrix} = 0.$$

Lösning:

Svar: ....

(b) Låt

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm koordinatbytesmatrisen $\underset{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}}{P}$ från basen $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ i $\mathbb{R}^2$ till $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ (3p)
samt koordinatvektorn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{U}}$ där $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}^T$.

Lösning:

Svar: ....

(c) Ange LU-faktoriseringen av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: .... VÄND!

(d) För vilka värden på a bildar vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} -1, 1, a \end{bmatrix}^T$ en bas för $\mathbb{R}^3$? (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Lös matrisekvationen $A^{-1}XA = B$ där (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

Lösningar TMA841, Linjär Algebra V, 120827

1. (a) Vi har

$$\begin{vmatrix} 2a & a & a \\ 2a & a & 1 \\ 3a+1 & a+1 & 2a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2a-2 & a-1 & 1 \\ 1-a & 1-a & 2a \end{vmatrix} = a(a-1)^2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -a(a-1)^2,$$

där vi i första steget bröt ut a från första raden och gjorde ett par kolonnoperationer, och i nästa steg bröt ut $a-1$ från första och andra kolonnen och sedan utvecklade längs första raden. Vi kan nu läsa av lösningarna $a = 0$ och $a = 1$.

(b) Upprepade radoperationer ger

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Alltså är

$$\underset{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}}{P} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad [\mathbf{x}]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Upprepade radoperationer ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -10 \end{bmatrix}.$$

Härifrån kan vi läsa av

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -10 \end{bmatrix}.$$

(d) Upprepade radoperationer ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att vektorerna bildar en bas om och endast om $a \neq 3$.

(e) Vi observerar att A är inverterbar med invers

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplikation av matrixekvationen med A från vänster och A^{-1} från höger ger då

$$X = ABA^{-1} = \cdots = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Systemets koefficientmatris kan skrivas

$$\begin{bmatrix} 1 & p-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ p & 2 & p \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & p-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2+p-p^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Systemet är lösbart för alla högerled om och endast om $2+p-p^2 \neq 0$, dvs. för alla p utom $p = -1$ och $p = 2$.

(b) För $p = 2$ är den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & b_2 \\ 2 & 2 & 2 & b_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_1 \end{array}\right],$$

och vi ser att systemet är lösbart om och endast om $b_3 - 2b_1 = 0$. Väljer vi istället $p = -1$ får vi på samma sätt villkoret $b_1 + b_3 = 0$.

3. (a) Vi har

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektorerna $\mathbf{u} = [1\ 1\ 1\ 0]^T$ och $\mathbf{v} = [1\ 1\ 0\ 1]^T$ bildar en bas för nollrummet. För att hitta en ortogonal bas väljer vi första basvektorn som $\mathbf{u}$ och kan ta andra basvektorn som

$$\mathbf{v} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

För att få enklare räkningar i del (b) multiplicerar vi denna vektor med 3 och väljer $\mathbf{e} = [1\ 1\ 1\ 0]^T$, $\mathbf{f} = [1\ 1\ \ -2\ 3]^T$ som ortogonal bas för nollrummet.

(b) Den sökta vektorn är ortogonala projektionen av $\mathbf{x} = [0\ 1\ 1\ 0]^T$ på nollrummet, och kan beräknas som

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}}{\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}} \mathbf{e} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}} \mathbf{f} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Det sökta avståndet ges då av $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \left\|\frac{1}{5}[-3\ 2\ 1\ 1]^T\right\| = \sqrt{15}/5$.

4. (a) Vi beräknar

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ a+2 \end{bmatrix}.$$

För $a = 1$ är $\mathbf{u} = 3[1\ 1]^T$, det vill säga $[1\ 1]^T$ är en egenvektor med egenvärde 3. För andra värden på a är $\mathbf{u}$ inte parallell med $[1\ 1]^T$ och alltså ingen egenvektor. Vi väljer alltså $a = 1$ och beräknar

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 3).$$

Även $\lambda = -1$ är alltså ett egenvärde. Slutligen löser vi $A\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ och finner lösningarna $\mathbf{x} = x_2[-1\ 1]^T$. Sammanfattningsvis har A egenvärden 3 och -1, med respektive egenvektorer $[1\ 1]^T$ och $[-1\ 1]^T$ (samt alla nollskilda multipler av dessa).

(b) Systemets allmänna lösning är

$$\mathbf{x}(t) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + B \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Insättning av begynnelsevillkoret ger $A = 1/2$, $B = -1/2$, så lösningen är

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{3t} + e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} \end{bmatrix}.$$

5. Om linjen ifråga ges av $y = kx + l$ så är vektorn $\mathbf{x} = [k\ l]^T$ den entydiga lösningen till

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}, \tag{1}$$

där

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}.$$

Att $y = kx + l$ går genom punkten $(-1/3, 1/2)$ betyder att $k = 3l - 3/2$, det vill säga

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3l - 3/2 \\ l \end{bmatrix}.$$

Med detta värde på $\mathbf{x}$ blir

$$A^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 20l - 9 \\ 10l - 3 \end{bmatrix}, \qquad A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2a + 1 \\ a + 2 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att (1) gäller för $l = (a + 5)/10$. Oavsett valet av a definierar alltså lösningen till (1) en linje genom punkten $(-1/3, 1/2)$, vilket skulle visas.

6. (a) Det följer av vanliga deriveringsregler att $T(p + q) = T(p) + T(q)$ och $T(cp) = cT(p)$, där c är konstant.

(b) Vi beräknar

$$T(1) = 1, \qquad T(t) = 1 + t, \qquad T(t^2) = 1 + 2t + 2t^2,$$

och kan läsa av avbildningsmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Vi skriver

$$\begin{aligned} T(1) &= 1, \\ T(t + 2) &= T(t) + 2T(1) = 3 + t = 1 + (t + 2) \\ T(t^2) &= 1 + 2t + 2t^2 = 1 + 2((t + 2) - 2) + 2t^2 = -3 + 2(t + 2) + 2t^2, \end{aligned}$$

så avbildningsmatrisen blir nu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. (a) Se kursboken.

(b) Vi måste visa att om

$$a\mathbf{x} + bA\mathbf{x} + cA^2\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{2a}$$

så är $a = b = c = 0$. Multiplicerar vi (2a) dels med A, dels med A^2, får vi

$$aA\mathbf{x} + bA^2\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{2b}$$

$$aA^2\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{2c}$$

där vi använde att $A^3\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Eftersom $A^2\mathbf{x} \neq 0$ ger (2c) $a = 0$. Insättning av $a = 0$ i (2b) ger $b = 0$ och slutligen får vi $c = 0$ från (2a).