MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 120307 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Magnus Önnheim
0703 088 304

TMV140 Linjär algebra Z

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor och Matlab 2012 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 120308. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Ett granskningstillfälle kommer att anordnas, se information på kursens webbsida. Därefter kan tentorna granskas vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Låt W vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Verifiera att vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ är ortogonal mot W. (1p)

(b) Bestäm en ortogonal bas för W. (2p)

(c) Beräkna ortogonaldekompositionen av vektorn $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ med avseende på W. (2p)

(d) Bestäm avståndet från $\mathbf{y}$ till W. (1p)

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A. (3p)

(b) Ange en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^T$. (1p)

(c) Bestäm A^{100} (Obs! Du behöver inte räkna ut a^{100} för något tal a). (2p)

4. (a) Definiera begreppet *koordinater* för en vektor relativt en bas för ett underrum i $\mathbb{R}^n$. (2p)

(b) Visa att $\mathcal{B} = \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ är en bas för $\mathbb{R}^3$, där (4p)

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix},$$

och ange koordinaterna för vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ relativt basen $\mathcal{B}$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Om godkäntgränsen ej är uppnådd kommer överbetygsdelen inte att rättas. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång som åtminstone skulle kunna leda till målet.

5. Följande deluppgifter, som maximalt kan ge 2p per deluppgift, skall besvaras med Sant eller Falskt. Svarar du Sant, ge en tydlig motivering. Svarar du Falskt, ge ett motexempel. Enbart svar ger inga poäng.

(a) Om T är en injektiv linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$, så är $n \leq m$.

(b) Om A är radekvivalent med enhetsmatrisen så är A diagonaliserbar.

(c) Om P är ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$ och $T(\mathbf{x})$ betecknar spegelbilden av vektorn $\mathbf{x}$ i P, så är standardmatrisen för avbildningen T diagonaliserbar.

6. (a) Visa att de fyra polynomen (3p)

$$B_0(t) = (1-t)^3, \quad B_1(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_2(t) = 3t^2(1-t), \quad B_3(t) = t^3$$

bildar en bas för rummet av alla polynom av grad högst 3, dvs rummet $\mathbb{P}_3$.

(b) Bestäm koordinaterna för polynomet $p(t) = t^2 + 1$ i den basen. (3p)

7. (a) Visa att för varje matris A är $\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Nul}(A^T A)$. (3p)

(b) Visa, till exempel med hjälp av resultatet i (a), att $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(AA^T)$. (3p)
Du får alltså använda resultatet i del (a) även om du inte gjort del (a).

Lycka till!
Peter H

Anonym kod	TMV140 Linjär algebra Z 120307	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Ange standardmatrisen för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som avbildar $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Beräkna även $T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: .... VÄND!

(d) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. Ange en bas för $\mathrm{Col}(A)$ och en bas för $\mathrm{Nul}(A)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm den räta linje $y = a + bx$ som är bäst anpassad, i minstakvadrat-metodens mening, till punkterna $(x, y) = (1, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Lösningar TMA140, Linjär Algebra Z, 120307

1. (a) Vi gör först radoperationer, och utvecklar sedan efter rader:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

(b) Vi kan direkt skriva upp avbildningsmatrisen $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vi har då

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Upprepade radoperationer ger

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Alltså är

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Vi har

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alltså bildar pivotkolonnerna $[1\ 1\ 2]^T$, $[0\ 1\ 0]^T$ en bas för kolonnrummet och $[-2\ -2\ 1\ 0]^T$, $[-1\ 1\ 0\ 1]^T$ en bas för nollrummet.

(e) Insättning av punkterna i linjens ekvation ger

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b = 1 \\ a + 3b = 1. \end{cases}$$

Normalekvationerna för detta system är

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dvs

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Detta har lösningen $a = -1/3$, $b = 1/2$, så den sökta linjen är

$$y = -\frac{1}{3} + \frac{x}{2}.$$

2. (a) Låt $\mathbf{u}_1 = [1\ -1\ 1\ 0]^T$, $\mathbf{u}_2 = [2\ -3\ 1\ -1]$, $\mathbf{x} = [1\ 1\ 0\ -1]^T$. Det räcker att kontrollera att $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2 = 0$.

(b) Med Gram–Schmidts metod sätter vi $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ och

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Då är $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en ortogonal bas för W.

(c) Ortogonala projektionen på W ges av

$$\frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1+\frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2=3\mathbf{v}_1-2\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}3\\-1\\5\\2\end{bmatrix}.$$

Komponenten i riktning ortogonal mot W är då

$$\mathbf{y}-\begin{bmatrix}3\\-1\\5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

(d) Avståndet till W är längden på vektorn $\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$ ovan, dvs $\sqrt{2^2+1^1+1^2+0^2}=\sqrt{6}$.

3. (a) Karakteristiska ekvationen $\det(A-\lambda I)=0$ har rötterna $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=7$, som alltså är matrisens egenvärden. Ekvationen $A\mathbf{x}=-\mathbf{x}$ har lösningarna $c[1\ -1]^T$, ekvationen $A\mathbf{x}=7\mathbf{x}$ lösningarna $c[1\ 1]^T$. Dessa vektorer, med $c\neq 0$ är matrisens egenvektorer.

(b) Vi kan ta $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$ (kolonnerna är egenvektorer med längd 1) och $D=\begin{bmatrix}-1&0\\0&7\end{bmatrix}$.

(c) Vi har

$$A^{100}=PD^{100}P^T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&7^{100}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\cdots=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}7^{100}+1&7^{100}-1\\7^{100}-1&7^{100}+1\end{bmatrix}.$$

4. (a) Se kursboken.

(b) Upprepade radoperationer ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\4&5&2&4\\0&3&7&-1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\end{array}\right].$$

Eftersom koefficientmatrisen reduceras till enhetsmatrisen är de givna vektorerna en bas. I högerledet läser vi av koordinaterna $[-1\ 2\ -1]^T$.

5. (a) Detta är Sant. Att T är injektiv är ekvivalent med att avbildningsmatrisen för T (som är en $m\times n$-matris) har pivotelement i varje kolonn. Men eftersom dessa n pivotelement ligger i olika rader måste $m\geq n$.

(b) Detta är Falskt. Ett motexempel ges av $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$.

(c) Detta är Sant. Tag två icke-parallella vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i P samt en normalvektor $\mathbf{w}$ till P. Dessa är linjärt oberoende, och alltså en bas för $\mathbf{R}^3$. Vidare är $T(\mathbf{u})=\mathbf{u}$, $T(\mathbf{v})=\mathbf{v}$ och $T(\mathbf{w})=-\mathbf{w}$, så $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är egenvektorer. Det finns alltså en bas för hela rummet bestående av egenvektorer, vilket är definitionen av att vara diagonaliserbar.

6. **Lösning 1:** Genom att införa basen $1,t,t^2,t^3$ kan vi identifiera rummet av polynom med $\mathbb{R}^4$. Bernsteinpolynomen (de heter så) identifieras då med vektorerna $B_0=[1\ -3\ 3\ -1]^T$, $B_2=[0\ 3\ -6\ 3]^T$, $B_3=[0\ 0\ 3\ -3]^T$, $B_4=[0\ 0\ 0\ 1]^T$, och polynomet p med $[1\ 0\ 1\ 0]^T$. Vi ställer upp den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\-3&3&0&0&0\\3&-6&3&0&1\\-1&3&-3&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&4/3\\0&0&0&1&2\end{array}\right].$$

Här kan vi läsa av både att Bernsteinpolynomen bildar en bas (koefficientmatrisen är radekvivalent med enhetsmatrisen) och att de sökta koordinaterna är $[1\ 1\ 4/3\ 2]^T$.

Lösning 2: Om vi vill skriva ett polynom p som linjärkombination av Bernsteinpolynomen får vi

$$p(t) = A(1-t)^3 + 3Bt(1-t)^2 + 3Ct^2(1-t) + Dt^3.$$

Sätter vi här $t = s/(s+1)$ får vi efter förenkling

$$(s+1)^3 p\left(\frac{s}{s+1}\right) = A + 3Bs + 3Cs^2 + Ds^3.$$

Om p har grad högst 3 så är $(s+1)^3 p(s/(s+1))$ ett polynom i s av grad högst 3, så koefficienterna existerar entydigt. Detta visar att Bernsteinpolynomen bildar en bas. I specialfallet $p(t) = 1 + t^2$ får vi

$$(s+1)^3 + (s+1)s^2 = 1 + 3s + 4s^2 + 2s^3$$

och kan läsa av koordinaterna $[A\ B\ C\ D] = [1\ 1\ 4/3\ 2]$.

7. (a) Det gäller att visa att $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Implikationen åt höger följer genom att multiplicera med A^T. Implikationen åt vänster inses till exempel genom att skriva

$$\|A\mathbf{x}\|^2 = (A\mathbf{x})^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}.$$

Om $A^T A\mathbf{x} = 0$ är alltså $\|A\mathbf{x}\|^2 = 0$, vilket medför $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Enligt (a) gäller $\mathrm{Nul}(A)^\perp = \mathrm{Nul}(A^T A)^\perp$. Detta kan skrivas $\mathrm{Col}(A^T) = \mathrm{Col}((A^T A)^T) = \mathrm{Col}(A^T A)$. Kalla nu A för A^T och vi är klara.