MATEMATIK **Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2007-03-17 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakter: Peter Hegarty, Elin Götmark, Jonatan Vasilis
tel. 0733-428321/0762-721860/0762-721861

Linjär Algebra Z1 (tmv140)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 06/07 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens (06/07) webbsida 19/3. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a+1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & a+1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & a+1 \end{vmatrix}$. (2p)

(b) U är det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. (3p)

Avgör för vilket eller vilka värden på den reella konstanten a vektorn $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & a-4 & 5-a & 2 \end{bmatrix}^T$ tillhör underrummet U.

(c) Ange dessutom en bas för underrummet U ovan. (2p)

(d) Ange avbildningsmatrisen (i standardbas) för den linjära avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av $F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. (2p)

(e) Ange minstakvadratlösningen till ekvationsystemet (3p)

$$\begin{cases} x & & = 0 \\ & y & = 1 \\ x & + \; y & = 10. \end{cases}$$

(f) Ange LU-faktoriseringen av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. (a) Bestäm en matris P som diagonaliserar matrisen $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. (6p)

Ange också diagonalmatrisen D som uppfyller $P^{-1}MP = D$.

(b) Låt $\mathbb{P}_2$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2. Den linjära avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ definieras enligt (2p)

$$T(p(t)) = p''(t) + (t+1)p'(t) + 2p(t)$$

Visa att M är avbildningsmatrisen till T i standardbasen $\{1, t, t^2\}$. Bestäm en bas för $\mathbb{P}_2$ av egenvektorer till T.

Var god vänd!

3. Låt U vara ett underrum i $\mathbb{R}^4$ som definieras genom

$$U = \{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \text{ och } x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \}$$

(a) Ange en matris A så att $U = \operatorname{Nul} A$. Bestäm en bas för U. (2p)

(b) Bestäm en ON-bas för U. (2p)

(c) Skriv vektorn $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ med $\mathbf{w}_1 \in U$ och $\mathbf{w}_2 \in U^\perp$. Bestäm sedan avståndet från $\mathbf{w}$ till U. (2p)

4. Lös följande system av differentialekvationer (6p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1.$$

5. Basen $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ och basen $\mathcal{C}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. (4p)

Bestäm basbytesmatrisen (koordinatbytesmatrisen) $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Spegling i linjen $y = x + 1$ är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$.

(b) Om A är en symmetrisk matris så är A diagonaliserbar.

(c) Om A är en diagonaliserbar matris så är A symmetrisk.

(d) $U = \{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x_2 \}$ är ett underrum i $\mathbb{R}^2$.

(e) Om tre vektorer spänner upp $\mathbb{R}^3$ så är de linjärt oberoende.

(f) Om A är en $n \times n$ matris och $(\operatorname{Col} A)^\perp = \{\mathbf{0}\}$ så är $\det A \neq 0$.

7. Låt A vara en $n \times n$ matris.

(a) Definiera begreppet: *A är en inverterbar matris.* (1p)

(b) Bevisa enbart med stöd av definitionen ovan: om $A^2 + A = I_n$ så är A inverterbar. (2p)

(c) Bevisa: om A är inverterbar så är inte noll ett egenvärde till A. (1p)

(d) Bevisa: om A har ortogonala kolonner och ingen kolonn är nollvektorn så är A inverterbar. (2p)

May the force be with you!
/Peter.

Lösningar

1. (a) Om vi utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - R_1,$$

då ändras inte determinanten och matrisen förvandlas till

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}.$$

Denna matris är diagonal så dess determinant är bara produkten av elementen på huvuddiagonalen, nämligen $(a-1)(a-2)(a-3)$.

(b) Vi arbetar med den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{rrrr|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & a-4 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 5-a \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Efter följande sekvens av radoperationer

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 2R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 + R_1,$$
$$R_3 \mapsto R_3 - 5R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 + 3R_2, \quad R_4 \mapsto 4R_4 + 3R_3,$$

så erhålls trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{rrrr|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & a-5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 28-6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36-6a \end{array}\right].$$

Systemet är konsekvent och därmed är $\mathbf{w} \in U$ om och endast om $36 - 6a = 0 \Rightarrow a = 6$.

(c) I trappstegsformn ovan finns pivotelement i kolonner 1,2 och 4. Därmed utgör $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_4$ en bas till U.

(d) Det är redan givet att $F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Vi behöver också $F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Notera att $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Därför är

$$F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Avbildningsmatrisen i standardbas är alltså

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

(e) Ekvationssystemet i matrisform är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi beräknar

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Svar : $x = 3$, $y = 4$.

(f) Då man utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 3R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 4R_2,$$

så erhålls trappstegsformen

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -10 \end{bmatrix}.$$

Vi kan också skriva ner L direkt, nämligen

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Vi söker egenvärdena och egenvektorerna till M. Ty M är övre triangulär så står dess egenvärden på huvuddiagonalen. Så M har egenvärden $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ och $\lambda_3 = 4$. Nu hittar vi motsvarande egenvektorer.

$\lambda_1 = 2$: Vi har

$$M - 2I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Efter radoperationerna $R_2 \mapsto R_2 - R_1$, $R_2 \leftrightarrow R_3$ erhålls trappstegsformen $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vidare efter återsubstitution ser vi att matrisens nollrum spänns upp av vektorn $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2 = 3$: Vi har

$$M - 3I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Efter radoperationen $R_3 \mapsto R_3 - R_2$ erhålls trappstegsformen $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vidare efter återsubstitution ser vi att matrisens nollrum spänns upp av vektorn $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\lambda_3 = 4$: Vi har

$$M - 4I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

som redan är i trappstegsform. Efter återsubstitution ser vi att matrisens nollrum spänns upp av vektorn $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Matriserna P och D väljs nu enligt

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Att M är matrisen för T i basen $\{1, t, t^2\}$ betyder att

$$\begin{aligned} T(1) &= 2, \\ T(t) &= 1 + 3t, \\ T(t^2) &= 2 + 2t + 4t^2. \end{aligned}$$

Det är bara att kolla att så är fallet. T.ex.

$$T(t^2) = (t^2)'' + (t+1)(t^2)' + 2t^2 = 2 + (t+1)(2t) + 2t^2 = 2 + 2t + 4t^2.$$

En bas av egenvektorer till T ges av kolonnerna i matrisen P ovan och en sådan bas är alltså $\{1, 1+t, 2+2t+t^2\}$. Kolla att

$$\begin{aligned} T(1) &= 2 \cdot 1, \\ T(1+t) &= 3 \cdot (1+t), \\ T(2+2t+t^2) &= 4 \cdot (2+2t+t^2). \end{aligned}$$

3. (a) Vi söker en matris A sådan att

$$U = \{\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T \in \mathbf{R}^4 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Uppenbarligen är

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Radoperationen $R_2 \mapsto R_2 - R_1$ tar A till trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Variablerna x_3 och x_4 är alltså fria och efter återsubstitution ser vi att nullrummet ges av

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - x_4 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Därför är $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ en bas för U där

$$\mathbf{v}_1 = [1\ 0\ 1\ 0]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [-1\ 1\ 0\ 1]^T.$$

(b) Vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är inte ortogonala (deras skalärprodukt är -1). Så vi först byter ut $\mathbf{v}_2$ mot

$$\begin{aligned} \mathbf{y} := \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_2 - \left(\frac{-1}{2}\right)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Det återstår att normalisera. Vi tar

$$\mathbf{u}_1 := \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

och

$$\mathbf{u}_2 := \frac{\mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||} = \sqrt{\frac{2}{5}}\mathbf{v}_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Då utgör $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ en ON-bas för U.

(c) Vi har att

$$\mathbf{w}_1 = \text{proj}_U\mathbf{w} = (\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + \frac{2}{5}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{y})\mathbf{y}.$$

Kolla att $\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}_1 = 1$ och $\mathbf{w}\cdot\mathbf{y} = \frac{5}{2}$. Därför gäller att

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Och vidare är alltså

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{w} - \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(Kolla att $\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_2\cdot\mathbf{u}_2 = 0$). Avståndet från $\mathbf{w}$ till U är just längden av vektorn $\mathbf{w}_2$, nämligen $\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{10}$.

4. Sätt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Då har systemet formen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ och lösningen ges av $\mathbf{x} = e^{At}\mathbf{x}_0$. Om vi antar att A är diagonaliserbar, säg $A = PDP^{-1}$ där $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, så ges lösningen mer explicit av

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}P^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Så det gäller att diagonalisera A för att hitta λ_1, λ_2 och P och sedan bara multiplicera ut allting i (1).

Den karakteristiska ekvationen för A är

$$(2-\lambda)(1-\lambda) - 2\cdot 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-4)(\lambda+1) = 0,$$

så vi har egenvärdena $\lambda_1 = 4$ och $\lambda_2 = -1$. Motsvarande egenvektorer hittas på sedvanligt sätt (se uppgift 2) och vi konstaterar att $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är egenvektorer tillhörande λ_1 resp. λ_2. Då tar vi

$$P = [\mathbf{v}_1 \; \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Stoppar vi in allting i (1) och multiplicerar ut så får vi till slut att

$$x_1(t) = \frac{3}{5}e^{4t} - \frac{3}{5}e^{-t},$$
$$x_2(t) = \frac{2}{5}e^{4t} + \frac{3}{5}e^{-t}.$$

5. Koordinatbytematrisen $P := {}_{\mathcal{C}}\overset{P}{\leftarrow}{}_{\mathcal{B}}$ erhålls genom att skriva vektorerna i basen $\mathcal{B}$ i termer av basen $\mathcal{C}$. Mer precis $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är den 2×2 matris s.a.

$$\mathbf{u}_1 = a\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{u}_2 = b\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2.$$

I matrisform blir detta till

$$[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2] = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]P \Rightarrow P = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]^{-1}[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. (a) Falskt. Linjen går inte genom origon så speglingen avbildar ej nollvektorn på sig själv.

(b) Sant. Theorem 2, p.451.

(c) Falskt. Många icke-symmetriska matriser är också diagonaliserbara. Exempel finns i uppgifter 2 och 5 på denna tenta.

(d) Falskt. U är inte sluten under skalärmultiplikation med ett negativt tal.

(e) Sant. Att dimensionen av $\mathbf{R}^3$ är tre innebär att tre st. vektorer spänner upp rummet om och endast om de är linjärt oberoende. Se Theorem 12, p.259.

(f) Sant. Att ortogonalkomplementet till kolonnrummet enbart består av nollvektorn innebär att kolonnrumet är hela $\mathbf{R}^n$. Dvs matrisens kolonner spänner upp $\mathbf{R}^n$, och därmed är A inverterbar (Theorem 8(h), p.129). Att A är inverterbar innebär i sin tur att $\det(A) \neq 0$ (Theorem 4, p.194).

7. (a) Det är definitionen i boken man är ute efter : se p.119. En $n \times n$ matris A sägs vara *inverterbar* om det finns en $n \times n$ matris B s.a. $AB = BA = I_n$. Man brukar skriva $B := A^{-1}$.

(b) $A^2 + A = I_n \Leftrightarrow A(A + I_n) = (A + I_n)A = I_n$ så $A + I_n$ är inversen till A, per definition av inversen ovan.

(c) Om noll var ett egenvärde till A så skulle det finnas en motsvarande egenvektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ s.a. $A\mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Men om $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ och A är inverterbar, så kan vi multiplicera till vänster i båda leden med A^{-1} och erhålla att $\mathbf{0} = A^{-1}(A\mathbf{v}) = (A^{-1}A)\mathbf{v} = I_n\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Alltså är $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, en motsägelse. Se också satsen på s.312 i boken. Motiveringen av satsen i boken finns på s.311.

(d) Om kolonnerna är ortogonala och skilda från noll så är dem speciellt linjärt oberoende (Theorem 4, p.384). Men en kvadratisk matris vars kolonner är linjärt oberoende är inverterbar (Theorem 8(e), p.129).