14:12**MATEMATIK** **Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2005–?? kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: , tel. 0739779268

Linjär Algebra Z1 (tmv 140)
Övningstenta 1

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Lösningar anslås på Matematiskt Centrum första arbetsdagen efter tentamenstillfället.

Rättningsprotokoll anslås på Matematiskt Centrum ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Lös matrisekvationen $AXB = C + 2XB$, där (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2. (a) Visa att ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ saknar lösning om (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(b) Om man i MATLAB ger kommandot

```
>> x = A\b
```

så får vi ändå en lösning $\boldsymbol{x} = [1\ 0\ 2]^T$. Ange vilket ekvationssystem $\boldsymbol{x}$ är en exakt lösning till och *verifiera* att det är en lösning till detta.

3. Bestäm A^n för godtyckligt heltal $n \geq 1$ om $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. (6p)

4. Låt följande vektorer i $\mathbb{R}^4$ vara givna (7p)

$\mathbf{v}_1 = [1\ 2\ 3\ 4]^T$, $\mathbf{v}_2 = [1\ 1\ 0\ 1]^T$, $\mathbf{v}_3 = [4\ 3\ 2\ 1]^T$ och $\mathbf{v}_4 = [1\ 0\ 2\ \lambda]^T$.

(a) För vilket eller vilka värden på parametern λ utgör vektorerna ovan *inte* en bas för $\mathbb{R}^4$?

(b) För $\lambda = 1$, bestäm koordinaterna för $\mathbf{b} = [4\ 5\ 3\ 1]^T$ i ovanstående bas.

5. LU-faktorisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (6p)

6. P är en ortogonalmatris (dvs P är kvadratisk med ortonormerade kolonner). (6p)
Vidare är

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad P \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Bestäm a, b och c.

Var god vänd!

7. Vilka av följande påståenden är sanna respektive falska? (6p)
Ge *motexempel* till de falska.

(a) Ett ekvationssystem med fler obekanta än antalet ekvationer har alltid minst en lösning.

(b) Om ett kvadratiskt ekvationssystem är lösbart så är koefficientmatrisen inverterbar.

(c) Ett homogent ekvationssystem har alltid minst en lösning.

(d) Ett inhomogent ekvationssystem med fler ekvationer än antalet obekanta kan aldrig ha någon lösning.

(e) Ett homogent ekvationssystem med fler obekanta än antalet ekvationer har oändligt många lösningar.

8. Låt A vara en 3×3-matris.

(a) Vad menas med att λ är ett egenvärde till A (6p)

(b) Bevisa att λ är ett egenvärde till A om och endast om λ är en lösning till karaktäristiska ekvationen. (Sekularekvationen.) (4p)

Lycka till!
TG