MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Tid: 2024-08-23, kl 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Inga utöver bifogat formelblad.

Tentamen i MVE018/017/TMV139 Matematisk analys i en variabel för I1 och Z1.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. Bonuspoäng från hösten 2023 inkluderas. Lösningar läggs ut på kursens sida i Canvas senast 24/8. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. **Lösningar ska vara fullständiga, kalkyler ska redovisas, använda metoder från kursen och kunna följas stegvis. Svar ska förenklas.**
Examinator: Jan Alve Svensson.

---

1. a) Lös begynnelsevärdesproblemet $(1+x^2)y' - x\sqrt{y} = 0,\ y(0) = 1$. (3p)

   b) Lös differentialekvationen $y'' + 4y' + 3y = x\,e^x$. (5p)

2. a) Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$. (3p)

   b) Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan t}{t^2}\,dt$ om integralen konvergerar. (5p)

   Motivera annars att den divergerar.

3. Bestäm Maclaurinserien till funktionen $\displaystyle f(x) = \frac{x}{1 - 3x + 2x^2}$. (4p)

   Förenkla svaret!

4. a) Bestäm konvergensintervallet till potensserien (3p)

   $$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}(x-2)^{2n+1}. \qquad \text{Motivera noga!}$$

   b) Beräkna summan av serien $p(1)$. (3p)

5. Området mellan grafen till $f(x) = x^2 + x,\ 0 \le x \le 1$ och linjen $y = 2$ roterar runt y-axeln så att en kropp bildas. Beräkna kroppens volym. (6p)

6. För vilka tal a gäller det att $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = 1$? (6p)

7. En skål som har formen av en halv sfär med radie 1 m fylls med vätska i takten π liter/minut. Samtidigt avdunstar vätska från skålen i takt proportionell mot vätskespegelns (vätskeytans) area. Proportionalitetskonstanten har bestämts till 1/84 (decimeter/minut).

   a) Till vilken höjd når vätskan långsiktigt? (2p)

   b) När är höjden hälften av den i (a)? (4p)

8. Formulera och bevisa konvegenskriteriet för alternerande serier. (6p)