Lösningar till MVE018/017/TMV139 Matematisk analys i en variabel för I1 och Z1 24-08-23

1. (a) Separering av variabler ger $\dfrac{y'}{\sqrt{y}} = \dfrac{x}{1+x^2}$ som integreras till

$2\sqrt{y} = 1/2 \cdot \ln(1+x^2) + C$ för nån konstant C.
Villkoret $y(0) = 1$ ger $2 = C$ så

$$y = (\sqrt{y})^2 = \left(\frac{1}{4}\ln(1+x^2) + 1\right)^2.$$

Svar: $y = (\ln(1+x^2)/4 + 1)^2$.

(b) Den karaktäristiska ekvationen är $0 = r^2 + 4r + 3 = (r+1)(r+3)$ så lösningarna till den homogena ekvationen är

$$y_h = A\,e^{-3x} + B\,e^{-x}$$

där A och B är godtyckliga konstanter.
Substitutionen $y = e^x z$ ger

$$\begin{array}{r|rcl} 3 & y & = & e^x z \\ 4 & y' & = & e^x(z' + z) \\ 1 & y'' & = & e^x\,(z'' + z' + z' + z) \end{array}$$

som vid insättning ger

$$e^x\,(z'' + 6\,z' + 8\,z) = e^x x$$

eller

$$z'' + 6\,z' + 8\,z = x.$$

Ansättning av partikulärlösning ger

$$\begin{array}{r|rcl} 8 & z_p & = & a\,x + b \\ 6 & z_p' & = & a \end{array}$$

som vid insättning ger

$$8\,a\,x + (8\,b + 6\,a) = x$$

så att $a = 1/8$, och $b = -3/32$.
Lösningarna till ekvationen är nu $y = y_h + e^x z_p$.

Svar: $y = A\,e^{-3x} + B\,e^{-x} + e^x(x/8 - 3/32)$ där A och B är godtyckliga konstanter.

2. (a) Ansats för partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{x(x-1)^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(1-x)^2}$$

där handpåläggning ger $a = 1$ och $c = 1$. Insättning av $x = 2$ ger sen $1/2 = 1/2 + b + 1$ så $b = -1$.
Detta ger

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)} = \ln|\,x\,| - \ln|\,x-1\,| - \frac{1}{x-1}.$$

Svar: $\ln|\,x/(x-1)\,| - 1/(x-1),$.

(b) Partiell integration och partialbråksuppdelning ger

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan t}{t^2}\,dt \;=\; \Big[-\frac{1}{t}\,\arctan t \Big]_1^{\infty} \;+\; \int_1^{\infty} \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt \;=$$

$$=\; 0 \;+\; \frac{\pi}{4} \;+\; \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{t} \;-\; \frac{t}{1+t^2} \right) dt \;=$$

$$=\; \frac{\pi}{4} \;+\; \Big[\frac{1}{2}\ln \Big| \frac{t^2}{1+t^2} \Big| \Big]_1^{\infty} \;=\; \frac{\pi}{4} \;-\; \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \;=\; \frac{1}{4}\,(\pi \;+\; \ln 4)\;.$$

Svar: $(\pi \;+\; \ln 4)/4\,.$

3. Känd Maclaurinutveckling är

$$\frac{1}{1-t} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} t^n\,.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{x}{1 \;-\; 3\,x \;+\; x^2} \;=\; \frac{x}{(1-x)(1-2\,x)} \;=\; \frac{-1}{1-x} \;+\; \frac{1}{1-2\,x} \;=$$

$$=\; -\sum_{n=0}^{\infty} x^n \;+\; \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)x^n\,.$$

Svar: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)x^n\,.$

4. (a) Med $a_n \;=\; (-1)^n)(x-2)^{2\,n+1}/(3^n(2\,n+1))$ gäller att

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \;=\; \left| \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{2\,n+3}}{3^{n+1}(2\,n+3)} \cdot \frac{3^n(2\,n+1)}{(-1)^n(x-2)^{2\,n+1}} \right| \;=$$

$$=\; \frac{1}{3}\cdot\frac{2+1/n}{2+3/n}\cdot(x-2)^2 \to \frac{1}{3}(x-2)^2$$

när $n \to \infty\,.$
Kvotkriteriet ger därför att potensserien konvergerar när $|\,x \;-\; 2\,| \;<\; \sqrt{3}$ och divergerar när $|\,x - \;2\,| \;>\; \sqrt{3}\,.$
När $x \;=\; 2 \;\pm\; \sqrt{3}$ är

$$p(2 \;\pm\; \sqrt{3}) \;=\; \pm\sqrt{3}\,\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n \;+\; 1}$$

som är alternerande där $1/(2\,n \;+\; 1)$ avtar mot 0 när $n \to \infty\,.$
Kriteriet för alternerande serier ger därför konvergens när $x \;=\; 2 \;\pm\; \sqrt{3}\,.$

Svar: $[2 \;-\; \sqrt{3},\, 2 \;+\; \sqrt{3}]\,.$

(b) Känd Maclaurinutveckling är

$$\arctan t \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+1}\, t^{2\,n+1}$$

när $t \in [-1,\, 1]$. Med $t \,=\, (x \,-\, 2)/\sqrt{3}$ ger det

$$\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2\,n+1)}\,(x-2)^n \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\, p(x)$$

så

$$p(1) \;=\; \sqrt{3}\,\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \;=\; -\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}\,.$$

Svar: $-\sqrt{3}\,\pi/6$.

5. Volymen av kroppen som fås när området mellan x-axeln och linjen $y \,=\, 2$ då $0 \,\leq\, 0\,x \,\leq 1$ roterar runt y-axeln är en rät cirkulär cylinder med bas $\pi \cdot 1^2$ och höjd 2 så volymen av den är $2\,\pi$.

   Volymen av kroppen som fås när området mellan grafen till $f(x) \,=\, x^2 + x,\; 0 \,\leq\, x \,\leq 1$ och x-axeln roterar runt y-axeln ges enligt skalformeln av

$$2\,\pi \int_0^1 x(x^2 \,+\, x)\, dx \;=\; 2\,\pi \left[\, \frac{x^4}{4} \,+\, \frac{x^3}{3} \,\right]_0^1 \;=\; \frac{7}{6}\,\pi\,.$$

   Den efterfrågade volymen är skillnaden mellan första kroppens volym och den andra och ges därför av

$$2\,\pi \,-\, \frac{7}{6}\,\pi \;=\; \frac{5}{6}\,\pi\,.$$

   Svar: $5\,\pi/6$.

6. När $a \,=\, 0$ gäller att

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2} \;=\; -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \;-\; \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$$

   som ger att integralen då är divergent eftersom det andra gränsvärdet inte existerar (egentligt).

   När $a \,\neq\, 0$ gäller att

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{a^2 \,+\, x^2} \;=\; \frac{1}{a^2} \int_a^{\infty} \frac{dx}{1 \,+\, (x/a)^2} \;=\; \frac{1}{a}\left[\, \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \,\right]_a^{\infty} \;=$$

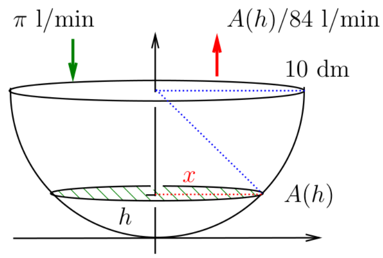
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{a}\left(-\dfrac{\pi}{2} \,-\, \dfrac{\pi}{4}\right) & \text{när} \quad a \,<\, 0, \\[2ex] \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{\pi}{2} \,-\, \dfrac{\pi}{4}\right) & \text{när} \quad a \,>\, 0, \end{cases}$$

   eftersom $\arctan t \,\to\, -\pi/2$ när $t \to \infty$ och $\arctan t \,\to\, \pi/2$ när $t \to \infty$ samt $\arctan 1 \,=\, \pi/4$.

   När $a \,<\, 0$ ska därför $1/a \,=\, -4/(3\,\pi)$ och när $a \,>\, 0$ ska $1/a \,=\, 4/\pi$.

   Svar: När $a \,=\, -3\,\pi/4$ och när $a \,=\, \pi/4$.

7.



Sätt $h = h(t)$ till vätskans höjd vid tiden t som mäts i decimeter eftersom 1 liter är 1 dm^3. Det gäller att $h(0) = 0$.

Med beteckningar i figuren är $A(h)$ arean av en cirkelskiva med radie x och Pythagoras sats ger att $(10 - h)^2 + x^2 = 10^2$ så att $x^2 = h(20 - h)$ och $A(h) = \pi h(20 - h)$.

Vätskans volym när höjden är h ges enligt skivformeln av

$$V(h) = \int_0^h A(s)\, ds$$

så att $V'(h) = A(h)$.

(a) Enligt uppgift gäller att

$$(V(h(t))' = V'(h)\, h'(t) = \pi - \frac{1}{84} A(h(t))$$

Vätskan slutar stiga när $h'(t) = 0$ vilket ger

$$0 = \pi - \frac{1}{84} A(h(t)) = \frac{\pi}{84}(84 - 20\, h + h^2) = \frac{\pi}{84}(h - 6)(h - 14)$$

där bara $h = 6$ dm är giltigt.

Svar: Långsiktigt stiger vätskan till 6 dm.

(b) Det gäller att $V'(h) = A(h)$ vilket med

$$(V(h(t))' = V'(h)\, h'(t) = \pi - \frac{1}{84} A(h(t))$$

ger ekvationen

$$A(h)\, h' = \pi - \frac{1}{84} A(h)$$

som efter multiplikation med 84 och division med π ger $84\, h(20 - h)\, h' = 84 - h(20 - h)$ som separeras till

$$\int \frac{84\, h(20 - h)}{84 - h(20 - h)}\, dh = \int 1\, dt + C$$

för nån konstant C.

Integration ger

$$
\begin{aligned}
\int \frac{84\,h(h-2)}{84 \;-\; h(20-h)}\,dh \;&=\; 84\int \frac{-\big(84 \;-\; h(20-h)\big) \;+\; 84}{84 \;-\; h(20-h)}\,dh \;= \\
&=\; 84\int \left(-1 \;+\; \frac{84}{(h-6)(h-14)}\right) dh \;= \\
&=\; 84\int \left(-1 \;-\; \frac{21/2}{h-6} \;+\; \frac{21/2}{h-14}\right) dh \;= \\
&=\; 84\left(-h \;+\; \frac{21}{2}\,\ln\left|\,\frac{h-14}{h-6}\,\right|\right) \;=\; t \;+\; C
\end{aligned}
$$

Eftersom $h(0) \;=\; 0$ gäller att

$$
C \;=\; 42 \cdot 21 \ln\left(\frac{7}{3}\right)
$$

så att när $h \;=\; 3$ ges t av

$$
t \;=\; 882\,\ln\left(\frac{11}{3} \cdot \frac{3}{7}\right) \;-\; 252 \;\approx\; 146.6509
$$

minuter.

Svar: Eter $882\,\ln(11/7) \;-\; 252$ minuter.