Lösningar till MVE018/017/TMV139 Matematisk analys i en variabel för I1 och Z1 24-04-05

1. (a) Du ser att y konstant ± 1 löser ekvationen. Annars ger omskrivning

$$x\,y' \;=\; 1 - y^2 \qquad \text{eller} \qquad \frac{y'}{1 - y^2} \;=\; \frac{1}{x}$$

som du integrerar till

$$\int \frac{dy}{1 - y^2} \;=\; \int \frac{1}{x}\,dx \;=\; \ln x + C_1$$

där C_1 är en godtycklig konstant.
Pratialbråksuppdelning ger

$$\int \frac{dy}{(1-y)(1+y)} \;=\; \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right)dy \;=\; \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$$

så

$$\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| \;=\; 2\ln x + C_2$$

där konstanten C_2 är godtycklig.
Exponentiering ger

$$\left|\frac{1+y}{1-y}\right| \;=\; C_3\,x^2 \qquad \text{eller} \qquad \frac{1+y}{1-y} \;=\; \pm C_3\,x^2 \;=\; C\,x^2 \;=\; f(x)$$

där C är en godtycklig konstant $\neq 0$.
Omskrivning ger

$$1 + y \;=\; f(1-y) \qquad \text{eller} \qquad y(1 + f) \;=\; f - 1$$

så att

$$y \;=\; \frac{f-1}{f+1} \;=\; 1 - \frac{2}{f+1} \;=\; 1 - \frac{2}{C\,x^2 + 1}$$

Här ger $C = 0$ lösningen $y \equiv -1$.

Svar: $y = 1 - 2/(C\,x^2 + 1)$ där C är en godtyckligt konstant, samt $y \equiv 1$

(b) Den karaktäristiska ekvationen är $0 = r^2 + 9 = (r + 3\,i)(r - 3\,i)$ så lösningarna till den homogena ekvationen är

$$y_h \;=\; e^{0\cdot x}\,(A\cos 3\,x + B\sin 3\,x)$$

där A och B är godtyckliga konstanter.
Ansättning av partikulärlösning ger

$$\begin{array}{r|lcl} 9 & y_p & = & a\,x^2 + b\,x + c \\ 1 & y_p'' & = & 2\,a \end{array}$$

som vid insättning ger

$$9\,a\,x^2 + 9\,b\,x + (2\,a + 9\,c) \;=\; x^2$$

så att $a = 1/9,\; b = 0$ och $c = -2/81$.
Lösningarna till ekvationen är nu $y = y_h + y_p$.

Svar: $y = A\cos 3\,x + B\sin 3\,x + x^2/9 - 2/81$ där A och B är godtyckliga konstanter.

2. (a) Variabelbytet $t = \cos x,\ dt = -\sin x\, dx$ ger efter omskrivning

$$\int \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x} = \int \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x}\, dx = \int \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\cos x - 2}{\cos x + 2} \right| .$$

Svar: $(\ln |(\cos x - 2)/(\cos x + 2)|)/4,.$

(b) Partialbråksuppdelning ger

$$\int_1^\infty \frac{x + 2}{x(1 + x^2)}\, dx = \int_1^\infty \left(\frac{2}{x} - \frac{2x - 1}{1 + x^2} \right) dx = \left[\ln \left(\frac{x^2}{1 + x^2} \right) + \arctan x \right]_1^\infty =$$

$$= \ln 1 + \frac{\pi}{2} - \ln \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{\pi}{4} = \ln 2 + \frac{\pi}{4} .$$

Svar: $\ln 2 + \pi/4\,.$

3. Kända Maclaurinutvecklingar är

$$\begin{aligned} \sin x &= x - x^3/3! + x^5/5! + \cdots \\ e^x &= 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots \\ \cos t &= 1 - t^2/2 + t^4/24 - \cdots \end{aligned}$$

som ger

$$t \sin t^3 = t^4 - t^{10}/6 + \cdots$$

och

$$e^{t^2} \cos t = (1 + t^2 + t^4/2 + \cdots)(1 - t^2/2 + t^4/24 + \cdots)$$

så att

$$\frac{t \sin t^3}{e^{t^2} \cos t - 1 + a\, t^2} = \frac{t^4 + \text{ termer av högre grad}}{(a + 1/2) t^2 + t^4/24 + \text{ termer av högre grad}} .$$

När $a \neq -1/2$ dominerar täljaren när $t \to 0$ och gränsvärdet blir 0 så a ska vara $-1/2$ så att kvoten efter förkortning med t^4 blir

$$\frac{1 + \text{ termer med } t}{1/24 + \text{ termer med } t} \to 24$$

när $t \to 0\,.$

Svar: $a = -1/2$ och gränsvärdet är då $24\,.$

4. (a) Med $a_n = (2 + (-1)^{n+1}) x^n/(2n)!$ gäller att

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{2 + (-1)^{n+2} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(2 + (-1)^{n+1}) x^{2n}} \right| =$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \cdot \frac{2 + (-1)^n}{2 + (-1)^{n+1}} \to 0$$

när $n \to \infty$, eftersom den sista kvoten antingen är 3 eller $1/3$.
Kvotkriteriet ger därför att konvergensintervallet är hela reella tallinjen.

Svar: $(-\infty, \infty)$.

(b) Kända Maclaurinutvecklingar ger

$$e^x + e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n)x^n}{n!}$$

och eftersom $1+(-1)^n = 0$ när n är udda gäller att

$$e^x + e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,x^{2n}}{(2n)!}$$

så att

$$p(x) = e^x + e^{-x} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = e^x + e^{-x} - \cos x\,.$$

Den givna serien är $p(1)$ så dess summa är $e + e^{-1} - \cos 1$.

Svar: $e + 1/e - \cos 1$.

5. Arean ges av integralen $A = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$
där $f'(x) = x$. Integration ger

$$A = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\pi\Big[\left(1+x^2\right)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{2\,\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

Svar: $2\pi(5\sqrt{5}-1)/3$.

6. Enligt formel är grafens längd

$$L = \int_2^3 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

där

$$f'(x) = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

vilket ger

$$L = \int_2^3 \sqrt{1+\frac{1}{x^2-1}}\,dx = \int_2^3 \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\,dx =$$

$$= \Big[\sqrt{x^2-1}\Big]_2^3 = \sqrt{8}-\sqrt{3}.$$

Svar: $\sqrt{8}-\sqrt{3}$.

7. Normalen i punkten $(a,\, f(a))$ har ekvationen

$$y \;=\; -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

och skär x-axeln när högra ledet är 0 dvs när $x = a + f'(a)f(a) = b$.

Triangeln med hörn i $(a,\, 0)\,(a,\, f(a))$ och $(b,\, 0)$ är rätvinklig så dubbla arean ges av

$$|\, f(a) - 0\,| \cdot |\, b - a\,| \;=\; |\, f(a)^2 f'(a)\,|$$

som alltså ska vara 4 för alla a vilket ger

$$f(x)^2\, f'(x) \;=\; \pm 4$$

som integreras till

$$f(x)^3/3 \;=\; \pm 4\,x + C_1 \qquad \text{eller} \qquad f(x)^3 \;=\; \pm 12\,x + C$$

för några konstanter C_1 och C.

Eftersom $f(3) = 2$ gäller att $8 = \pm 36 + C$ så att C är 44 när koefficienten framför x är negativ och $C = -28$ annars.

Svar: $f(x) = \sqrt[3]{44 - 12\,x}$ samt $f(x) = \sqrt[3]{12\,x - 28}$.