Svar och ibland ofullständiga lösningar till TMV138/139/181 samt MVE630

Fredag 9:e april 2021

1. Beräkna följande integraler

   a. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$ **(2p)**

   Svar: $2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$

   b. $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$ **(2p)**

   Svar: 4

   c. $\int_0^{\frac{3}{2}} \lfloor x^3 \rfloor - \lfloor x^2 \rfloor\, dx$ **(4p)**

   Svar: eftersom $1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \frac{3}{2}$ blir
   integralen = $\frac{3}{2} + \sqrt{2} - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$
   Notera att $8 < 9 \;\Rightarrow\; \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} \;\; och \; 3 < \frac{27}{8} \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{3} < \frac{3}{2}$

2. Beräkna den generaliserade integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ **(4p)**

   Svar: Efter kvadratkomplettering får vi integralen $= \left[\frac{1}{4} arctan\left(\frac{2x+1}{2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{4}$

3. Bestäm alla x sådana att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$ är konvergent. **(5p)**

   Svar: för alla $-1 < x < 1$ (i $x = \pm 1$ är serien divergent eftersom termerna inte går mot 0)

4. Lös differentialekvationen
$y'' - 2y' + 2y = x + 1,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$ **(4p)**

Svar: homogenlösningen är $y_h = e^x(A\cos x + B\sin x)$ och partikulärlösningen är $y_p = \frac{x}{2} + 1$. Efter att vi bestämmer A och B får vi:
$y = 2e^x \cos x - \frac{5}{2}e^x \sin x + \frac{x}{2} + 1$

5. Området mellan kurvorna $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ och $x = \frac{\pi}{4}$ roterar kring linjen $y = -1$.
Beräkna rotationsvolymen. **(5p)**

Svar: volymen är $= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 1)^2 - (\sin x + 1)^2 dx = \pi\left(2\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)$

6. Låt $f(x) = \int_0^x \frac{e^t - 2}{\arctan(t+1)} dt$, $x \geq 0$

Bestäm det *x* i vilket $f(x)$ antar sitt minsta värde.

Lösning: genom att rita kurvan $y = \frac{e^t - 2}{\arctan(t+1)}$ ser vi att integranden är <0 för $0 \leq t < \ln 2$ och >0 för $t > \ln 2$. Svar: $x = \ln 2$

7. Bestäm med hjälp av Maclaurinutvecklingar ett närmevärde till $arctan\frac{1}{2}$ med ett fel som är <0.002.
Använd inte fler termer än nödvändigt! **(6p)**

Lösning: resttermen i utvecklingen för arctan kan uppskattas med $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ Vi skall alltså bestämma det minsta heltalet n sådant att $\frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)} < 0.002$
Prövning ger n=3, vilket innebär att $\arctan\frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8\cdot 3} + \frac{1}{32\cdot 5}$

8. Från en godtycklig punkt P på kurvan $y = f(x)$ i första kvadranten, med $f(x)$ en deriverbar funktion, dras tangenten till kurvan. Tangenten skär x-axeln i punkten A. Antag att för varje sådan punkt P är sträckan mellan origo och P lika lång som sträckan mellan P och A.
Bestäm $f(x)$ om $f(1) = 2$ **(7p)**

Lösning: Låt p vara x-koordinaten för P och a x-koordinaten för A. Enligt förutsättningarna är $a = 2p$ eller $a = 0$. Tangentens ekvation är
$y - f(p) = f'(p)(x - p)$.

Genom att sätta $x = a$ får vi i det första fallet att $-f(p) = f'(p)p$ och eftersom detta gäller för alla $p > 0$ har vi differentialekvationen $xy' + y = 0$ med lösningar $y = \frac{C}{x}$. Villkoret $f(1) = 2$ ger svaret $f(x) = \frac{2}{x}$.

Om å andra sidan $a = 0$ får vi på motsvarande sätt att $xy' - y = 0$ som ger lösningen $f(x) = 2x$

9. **(tmv138/181)**

a. Att den säkert är konvergent. Eftersom $a_n \to 0$ kan vi skriva $a_n < C$ för någon konstant C.

Så $\sum_1^\infty a_n b_n < C \sum_1^\infty b_n$ som är konvergent.

b. Ingenting. Om $a_n = b_n = 1$ blir $\sum_1^\infty a_n b_n$ divergent, men om $a_n = b_n = \frac{1}{n}$ blir $\sum_1^\infty a_n b_n$ konvergent.

(tmv139, mve630)

10. Melvin skall ut och skörda morötter. Efter t timmar skördar han med hastigheten e^{-t} skäppor per timme (han arbetar alltså hela tiden allt långsammare). Han arbetar i 4 timmar.

   a. Hur mycket har han skördat efter 4 timmar? **(2p)**

   Svar: $\int_0^4 e^{-t} dt = 1 - e^{-4}$

b. Nästa dag planerar Melvin att unna sig en paus. Han arbetar ett pass och vilar en timme innan han fortsätter. När han återupptar arbetet skördar han på nytt med hastigheten e^{-t} skäppor per timme, där t nu är tiden efter att pausen är slut.

När skall Melvin ta pausen för att efter 4 timmar (inklusive paus) ha skördat så mycket som möjligt? **(5p)**

Lösning: Antag att Melvin inleder pausen vid $t = a$. Mängden skäppor blir då $F(a) = \int_0^a e^{-t}dt + \int_{a+1}^4 e^{a+1-t}dt = 2 - e^{-a} - e^{a-3}$. Man hittar lätt maximum för denna funktion vid $a = \frac{3}{2}$

UPPGIFTER I FLERVARIABELANALYS, MVE630:

8. Genom att kasta om integrationsordningen får vi $\int_0^2 \left(\int_0^{y^2} \frac{1}{y^3+1} dx \right) dy = \int_0^2 \frac{y^2}{y^3+1} dy = \frac{\ln 9}{3}$

9. De stationära punkterna är lösningar till systemet $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -3x + 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ men

den punkten ligger utanför området.

Därefter betraktar vi $f(x, 0) = x^2 - x$,
$f(1, y) = y^2 + y$ samt $f(x, x) = 3x - x^2$ och hittar en enda intressant punkt: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Vi jämför denna med de tre hörnpunkterna och får största värde: $f(1,1) = 2$ och minsta värde: $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$