TENTAMEN I ANALYS I EN VARIBEL, TMV139

Fredag 15:e januari 2021 kl 8.30 – 12.30

Examinator: Johan Berglind

Tillåtna hjälpmedel: alla utom mänsklig assistans.

Skriv namn på samtliga inscannade sidor

Betygsgränser: 20 – 29 poäng ger betyg 3, 30 – 39 p betyg 4, 40 p eller mer betyg 5.

Bonuspoäng från duggor i Möbius lp2 2020 räknas in.

Ge kortfattade men tydliga motiveringar till samtliga lösningar. Enbart svar ger inga poäng.

1. Beräkna följande integraler:

   a. $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$ **(2p)**

   b. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+5x+6}$ **(2p)**

   c. $\int_0^1 \lfloor e^x \rfloor dx$

   ($\lfloor t \rfloor$ är heltalsdelen av t, det största heltalet $\leq t$) **(4p)**

2. Bestäm alla x sådana att potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergerar. **(5p)**

3. Använd Maclaurinutvecklingar för att bestämma gränsvärdet

   $\lim_{x \to 0} \frac{(e^x-1-x)^2}{x^2-\ln(1+x^2)}$ **(4p)**

4. Låt $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+\sin x^2}$

   a. Visa att $\frac{1}{1+\sin 1} \leq I \leq 1$ Rita figur! **(3p)**

   b. Visa, till exempel genom att använda olikheten $\sin t \leq t$ som gäller då $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, att $I \geq \frac{\pi}{4}$ **(5p)**

5. Lös differentialekvationen $y' = e^{x+y}$ om $y(0) = 0$ **(6p)**

6. Beräkna volymen av den kropp som bildas då området innanför kurvorna $y = x^2$ och $y = 2 - x^2$ roterar kring linjen $x = 1$ **(5p)**

7. Sätt $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

   a. Vi vill uppskatta seriens summa med de fem första termerna.
      Använd resonemanget i integralkriteriet för att hitta en övre gräns för differensen $S - \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n^3}$ **(4p)**

   b. Hur många termer måste man ta med, dvs hur stort måste *k* vara för att differensen $S - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3}$ skall vara $< \epsilon$ där ϵ är något givet positivt tal. **(4p)**

8. En tunna som rymmer 100 liter innehåller från början rent vatten. Man fyller på en saltlösning med koncentrationen 1 gram salt per liter med hastigheten 2 liter per minut. Samtidigt töms tunnan med samma hastighet så att innehållet är konstant 100 liter.
   Beskriv hur mängden salt varierar med tiden.
   Om är mängden salt vid tiden t är $s(t)$, vad blir $\lim_{t \to \infty} s(t)$? **(6p)**