TENTAMEN I ANALYS I EN VARIABEL, TMV139

Fredag 15:e januari 2021 kl 8.30 – 12.30

Svar eller lösningar

1. Beräkna följande integraler:

   a. $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$ **(2p)**

   Svar: $\frac{8 \ln 2}{3} - \frac{7}{9}$ (använd partiell integration)

   b. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+5x+6}$ **(2p)**

   Svar: $\ln \frac{9}{8}$ (använd partialbråksuppdelning)

   c. $\int_0^1 \lfloor e^x \rfloor dx$

   ($\lfloor t \rfloor$ är heltalsdelen av t, det största heltalet $\leq t$) **(4p)**

   Svar: $2 - \ln 2$ (heltalsdelen är = 1 fram till $x = \ln 2$, därefter = 2.

2. Bestäm alla x sådana att potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergerar. **(5p)**

   Svar: kvotkriteriet ger att $|3x + 1| < 1$, dvs $-\frac{2}{3} < x < 0$. För $x = -\frac{2}{3}$ är serien betingat konvergent, för $x = 0$ är den divergent. Alltså $-\frac{2}{3} \leq x < 0$

3. Använd Maclaurinutvecklingar för att bestämma gränsvärdet

   $\lim_{x \to 0} \frac{(e^x-1-x)^2}{x^2-\ln(1+x^2)}$ **(4p)**

Svar: $\frac{(e^x-1-x)^2}{x^2-\ln(1+x^2)} = \frac{\left(\frac{x^2}{2}+O(x^3)\right)^2}{\frac{x^4}{2}+O(x^6)} \to \frac{1}{2}$ $då\ x \to 0$

4. Låt $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+\sin x^2}$

   a. Visa att $\frac{1}{1+\sin 1} \leq I \leq 1$ Rita figur! **(3p)**

      Svar: använd att $\frac{1}{1+\sin 1} \leq \frac{1}{1+\sin x^2} \leq 1$ intervallet.

   b. Visa, till exempel genom att använda olikheten $\sin t \leq t$ som gäller då $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, att $I \geq \frac{\pi}{4}$ **(5p)**

      Svar: Eftersom $\frac{1}{1+\sin x^2} \geq \frac{1}{1+x^2}$ blir $I \geq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

5. Lös differentialekvationen $y' = e^{x+y}$ om $y(0) = 0$ **(6p)**

   Svar: ekvationen är separabel och kan skrivas $e^{-y}dy = e^x dx$. Av detta får vi $-e^{-y} = e^x + C$, där $C = 0$ från begynnelsevillkoret. Alltså $y = -\ln(2 - e^x)$

6. Beräkna volymen av den kropp som bildas då området innanför kurvorna $y = x^2$ och $y = 2 - x^2$ roterar kring linjen $x = 1$ **(5p)**

   Svar: Volymen är $= 2\pi \int_{-1}^{1} (1-x)(2-2x^2)\, dx = \frac{16\pi}{3}$

7. Sätt $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

   a. Vi vill uppskatta seriens summa med de fem första termerna.
      Använd resonemanget i integralkriteriet för att hitta en övre gräns för differensen $S - \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n^3}$ **(4p)**

   b. Hur många termer måste man ta med, dvs hur stort måste *k* vara för att differensen $S - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3}$ skall vara $< \epsilon$ där ϵ är något givet positivt tal. **(4p)**

Lösning: generellt gäller

att $\sum_1^\infty \frac{1}{n^3} = \sum_1^k \frac{1}{n^3} + \sum_{k+1}^\infty \frac{1}{n^3} < \sum_1^k \frac{1}{n^3} + \int_k^\infty \frac{dx}{x^3} = \sum_1^k \frac{1}{n^3} + \frac{1}{2k^2}$

På a) får vi därför $S - \sum_1^5 \frac{1}{n^3} < \frac{1}{50}$

På b) skall på motsvarande sätt $\frac{1}{2k^2}$ vara $< \epsilon$, alltså $k > \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}$

8. En tunna som rymmer 100 liter innehåller från början rent vatten. Man fyller på en saltlösning med koncentrationen 1 gram salt per liter med hastigheten 2 liter per minut. Samtidigt töms tunnan med samma hastighet så att innehållet är konstant 100 liter. Beskriv hur mängden salt varierar med tiden.
Om mängden salt vid tiden t är $s(t)$, vad blir $\lim_{t\to\infty} s(t)$? **(6p)**

Svar: om $s(t)$ är mängden salt vid tiden t, blir differentialekvationen $s'(t) = 2 - \frac{s(t)}{50}$ där $s(0) = 0$. Ekvationen löses med integrerande faktor och lösningen blir $s(t) = 100\left(1 - e^{-\frac{t}{50}}\right)$ Följaktligen blir $\lim_{t\to\infty} s(t) = 100$