Lösningar till MVE018/017/TMV139 Matematisk analys i en variabel för I1 och Z1 24-01-08

1. (a) Omskrivning ger $y\,y'/2 \;=\; -x/2$ som integreras till

$$y^2 \;=\; -x^2 + C\,, \quad y \;=\; \pm\sqrt{C - x^2}\,.$$

Villkoret $y(0) \;=\; 1$ ger att $C \;=\; 1$, och att

$$y \;=\; \sqrt{1 - x^2}\,.$$

Svar: $y \;=\; \sqrt{1 - x^2}\,.$

(b) Multiplikation med x^2 och överflyttning ger

$$y' - \frac{2}{x}\,y \;=\; -\frac{x}{x + 1}\,.$$

Eftersom $-\int 2/x\,dx \;=\; -2\ln x$ är

$$e^{-2\ln x} \;=\; x^{-2}$$

en integrerande faktor. Multiplikation med den ger

$$D\left(x^{-2}y\right) \;=\; -\frac{1}{x(x + 1)}\,.$$

Integration med PBU ger, eftersom $x > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{y}{x^2} \;&=\; -\int \frac{dx}{x(x + 1)} \;=\; \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) dx \;=\; \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| + C \\ &=\; \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + C \end{aligned}$$

där C är en godtycklig konstant.

Svar: $y \;=\; x^2(\ln((x+1)/x) + C)$ där C är en godtycklig konstant.

2. (a) Partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x^2)} \;&=\; \int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \;=\; \Big[-\frac{1}{x} - \arctan x\Big]_1^\infty \;= \\ &=\; 0 - \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} \;=\; 1 - \frac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

Svar: $1 - \pi/4\,.$

(b) Eftersom $\sin^2 \;=\; (1 - \cos 2\,x)/2$ gäller att

$$\int e^x \sin^2 x\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int (e^x - e^x\cos 2\,x) \;=\; \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2}\int e^x \cos 2\,x\,dx$$

Sätt den sista integralen till I. Cyklisk partiell integration ger då

$$I \;=\; e^x \cos 2x \,+\, 2\int e^x \sin 2x\,dx \;=\; e^x \cos 2x \,+\, 2\left(e^x \sin 2x \,-\, 2\int e^x \cos 2x\,dx\right) \;=$$

$$=\; e^x \cos 2x \,+\, 2e^x \sin 2x \,-\, 4\,I$$

så att

$$I \;=\; \frac{1}{5}\, e^x\,(\cos 2x \,+\, 2\sin 2x)$$

vilket ger

$$\int e^x \sin^2 x\,dx \;=\; \frac{e^x}{2} \,-\, \frac{e^x}{10}\,(\cos 2x \,+\, 2\sin 2x)$$

Svar: $e^x(5 \,-\, \cos 2x \,-\, 2\sin 2x)/10$.

3. Kända Maclaurinutvecklingar är

$$\begin{aligned} e^t &= 1 + t + t^2/2! + t^3/3! + \cdots \\ \ln(1+t) &= t - t^2/2 + t^3/3 - \cdots \\ \cos x &= 1 - x^2/2 + x^4/24 - \cdots \end{aligned}$$

som ger

$$\begin{aligned} 4x^2 - \ln(1 + a x^2) &= 4x^2 - \left(a x^2 - \frac{a^2x^4}{2} + \frac{a^3x^6}{3} - \cdots\right) = \\ &= (4-a)x^2 + \frac{a^2x^4}{2} - \frac{a^3x^6}{3} + \cdots \\ e^{-x^2/2} - \cos x &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \cdots\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots\right) = \\ &= \frac{x^4}{12} + \cdots \end{aligned}$$

och

$$Q \;=\; \frac{4x^2 \,-\, \ln\bigl(1 \,+\, a x^2\bigr)}{e^{-x^2/2} \,-\, \cos x} \;=\; \frac{(4 \,-\, a)x^2 \,+\, a^2x^4/2 \,+\, \cdots}{x^4/12 \,+\, \cdots}\,.$$

För att Q ska ha ett gränsvärde när $x \to 0$ krävs därför att $a = 4$. Då gäller att

$$Q \;=\; \frac{16/2 + \text{ termer med } x}{1/12 + \text{ termer med } x} \to 96$$

när $x \to 0$.

Svar: $a = 4$ och gränsvärdet är då 96.

4. (a) Med $a_n = (-1)^n(x-1)^{n+1}/(n(n+1))$ gäller att

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n(n+1)}{(x-1)^{n+1}}\right| = |\,x - 1\,| \cdot \frac{1}{1+2/n} \to |\,x - 1\,|$$

när $x \to 0$ så kvotkriteriet ger konvergens när $|\,x - 1\,| < 1$ och divergens när $|\,x - 1\,| > 1$.

När $x = 2$ är

$$p(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$

som är alternerande där $1/(n(n+1))$ avtar mot 0 när $n \to \infty$. Kriteriet för alternerande serier ger därför att $p(2)$ konvergerar.

När $x = 0$ är

$$p(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

där $1/(n(n+1)) < 1/n^2$. Eftersom $2 > 1$ konvergerar $\sum 1/n^2$ så jämförelsekriteriet ger att $p(0)$ konvergerar.

Svar: $[0,\, 2]$.

(b) Derivering ger

$$p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x-1)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1} = -\ln(1+(x-1)) = -\ln x$$

och integration

$$p(x) + C = -\int 1 \cdot \ln x \, dx = \{\text{PI}\} = -(x \ln x - x) = x(1 - \ln x).$$

Eftersom $p(1) = 0$ gäller att $C = 1$ och $p(x) = x(1 - \ln x) - 1$.

Svar: $p(x) = x(1 - \ln x) - 1$.

5. Enligt skivformeln ges volymen av

$$V = \pi \int_0^{\infty} \frac{x}{x^4 + 3\,x^2 + 2}\, dx$$

Variabelbytet $t = x^2$, $dt/2 = dx$ ger

$$V = \frac{\pi}{2}\int \frac{dx}{t^2 + 3\,t + 2} = \frac{\pi}{2}\int \frac{dx}{(t+1)(t+2)} = \{\text{PBU}\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right) dx = \frac{\pi}{2}\Big[\ln\left(\frac{t\,+\,1}{t\,+\,2}\right)\Big]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}(0 - \ln(1/2)) = \frac{1}{2}\pi \ln 2.$$

Svar: $(\pi \ln 2)/2$.

6. Enligt formel är grafens längd

$$L = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + x^2}\, dx\,.$$

eftersom $f'(x) = x$.
Variabelbytet $x = \tan t$, $dx = 1/\cos^2 t\, dt$ och $1 + \tan^2 t = 1/\cos^2 t$ ger

$$L = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^3 t}\, dt = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^3 t}\, dt = \int_0^{\pi/3} \sin t \cdot \frac{\sin t}{\cos^3 t}\, dt + \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos t}\, dt =$$

$$= \{ \text{ PI } \} = \Big[\frac{1}{2}\sin t \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\Big]_0^{\pi/3} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos t}\, dt + \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos t}\, dt =$$

$$= \sqrt{3} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos t}\, dt\,.$$

Variabelbytet $s = \sin t$, $ds = \cos t\, dt$ ger nu

$$\int \frac{1}{\cos t}\, dt = \int \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t}\, dt = \int \frac{ds}{(1-s)(1+s)} = \{ \text{ PBU } \} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s}\right) ds = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+s}{1-s}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+s)^2}{1-s^2}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right|$$

så att

$$L = \sqrt{3} + \frac{1}{2}\Big[\ln\left(\frac{1+\sin t}{\cos t}\right)\Big]_0^{\pi/3} = \sqrt{3} + \frac{1}{2}\left(\ln(2 + \sqrt{3}) - \ln 1\right).$$

Svar: $\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})/2$.

7. Variabelbytet $s = \sqrt{x}$, $2\, s\, ds = dx$ ger

$$\int \tan^2 \sqrt{x}\, dx = \int 2\, s\, \tan^2 s\, ds = 2\left(\int s(\tan^2 s + 1)\, ds - \int s\, ds\right) = \{ \text{ PI } \} =$$

$$= 2\left(s \tan s - \int \tan s\, ds - \frac{s^2}{2}\right) = 2\sqrt{x}\tan\sqrt{x} + 2\ln|\cos\sqrt{x}| - x\,.$$

Svar: $2\sqrt{x}\tan\sqrt{x} + 2\ln|\cos\sqrt{x}| - x$.