MATEMATIK
Chalmers

Tentamen Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137, 136)
Tid: 2020-01-15, kl 8.30 - 12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare. Telefonvakt: Barbara Schnitzer, ankn. 5325.

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 p eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från läsåret 19/20 inkluderas.) Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv137/1920/ och/eller utskick i Canvas.

---

1. Beräkna: **a)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, **b)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$, **c)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}/2} x\sin x^2\,dx$, (10p)
   d) $\displaystyle\int \ln x\,dx$, **e)** $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\,dx$, **f)** $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$, **g)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\,dx$.

2. a) Lös om möjligt följande ODE: **a)** $(x^2+1)y'+(2x^3+2x)y = x^5+x^3$, (6p)
   b) $y' + 2xy = xy^2, \quad y(1) = 2$.

3. Beräkna om möjligt $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)\ln(1+x^2)}{x(\cos x^2 - 1)}$. (6p)

4. **a)** Bestäm den volym som området ovanför grafen till funktionen $y = \sqrt{9+x^2}$ och under grafen till funktionen $y = 5$ ger upphov till vid rotation runt x-axeln. **b)** Beräkna längden av funktionskurvan $y = (1+x^{2/3})^{3/2}, \quad 1 \le x \le 8$. (3+3p)

5. **a)** Beräkna $\displaystyle\int e^{2x}\cos x\,dx$, **b)** Lös $y'' + 4y' + 4y = 16x^2e^{2x}$. (3+3p)

6. En elektrisk ström $I(t)$, där t är tiden, flyter genom en i serie kopplad krets med en elektrisk strömkälla om $E(t)$ volt, en konstant resistans om R ohm, en spole med konstant induktans L henry och en plattkondensator med konstant kapacitans C farad. Spänningsfallen över resistansen, induktansen och kapacitansen är $RI(t)$, $LI'(t)$ respektive $Q(t)/C$, där $Q(t)$ är laddningsmängd. Antag att R, L och C har mätetalen 3, 1 och 1/2 i respektive SI-enhet. Antag vidare att strömkällan E är konstant $10V$. (2+2+1 (+1)p)
   a) Använd Kirchoffs spänningslag för att teckna en ODE som beskriver förloppet i kretsen. **Ledning:** Strömmen är förändring i laddningsmängd.
   b) Lös denna ODE för $Q(t)$. **c)** Använd denna lösning för att bestämma jämnviktlösningen; dvs bestäm $\displaystyle\lim_{t\to\infty} Q(t)$. (Extra deluppgift värd en extra poäng: **d)** Ge ett 'fysikaliskt' argument (utan att lösa en ODE) för att jämnviktlösningen har det värde som erhölls i deluppgift **c)**.)

7. Lös ODE:n $y'' + \dfrac{3}{t}y' + \dfrac{1}{t^2}y = 16t\ln t$. **Ledning:** Skriv om och faktorisera operatorn och lös ett system av första ordningens ODE; använd $D(\frac{1}{t}y) = \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y$. (6p)

8. **a)** Formulera och bevisa formeln för partiell integration, **b)** Visa att för termerna a_k i en konvergent serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gäller $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. (5p)

Maclaurinutvecklingar på baksidan, vgv.

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$