Lösningar till Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137) 2020-01-15

1. **a)** $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$ 'listan' $= \arcsin x + C$, **b)** $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx =$ 'listan' $= \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$, **c)** $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\sin x^2\,dx = \Big[-\frac{\cos(x^2)}{2}\Big]_0^{\sqrt{\pi/2}} = -\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, **d)** $\int \ln x\,dx = [\text{PI}] = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x(\ln x - 1) + C$,
e) $\int \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{x^2-3x+2+x+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int 1 + \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = x + \int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = [\text{PBU}] =$
$= x + \int \frac{3}{x-2} + \frac{-2}{x-1}\,dx = x + 3\ln|x-2| - 2\ln|x-1| + C$, **f)** $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{2\cos x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = [t = \cos x] =$
$-\int \frac{-2t}{1+t^2}\,dt = -\ln|1+t^2| + C = -\ln(1+\cos^2 x) + C$, **g)** $\int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x^2-4x)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{-((x-2)^2-4)}}\,dx =$
$\int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x-2}{2})^2}}\,dx = [t = \frac{x-2}{2}] = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin t + C = \arcsin(\frac{x-2}{2}) + C.$

2. **a)** Då ju $x^2+1>0$ så fås $y' + 2xy = x^3$ som är linjär med IF: e^{x^2} så att eftermultiplikation av ekvationen med IF fås: $e^{x^2}y = \int \frac{d}{dx}(e^{x^2}y)\,dx = \int x^3 e^{x^2}\,dx = [t = x^2] = \frac{1}{2}\int te^t\,dt = [PI] = \ldots = \frac{1}{2}(t-1)e^t + C = \frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + C \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x^2-1) + Ce^{-x^2}$
b) Ekvationen har en lösning $y=0$ och en lösning $y=2$. Lösningen $y=0$ uppfyller inte begynnelsevärdesvillkoret och är alltså inte en sökt lösning. Ekvationen kan skrivas $y' = x(y^2-2y)$ som är en separabel ODE och om $y \neq 0$ och $y \neq 2$ fås att $\int x\,dx = \int \frac{1}{y^2-y}\,dy = [PBU] = \int \frac{1/2}{y-2} + \frac{-1/2}{y}\,dy$ och därmed $\frac{1}{2}\ln|\frac{y-2}{y}| = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \ln|\frac{y-2}{y}| = x^2 + C \Rightarrow \frac{y-2}{y} = \pm e^{x^2+C} = Ce^{x^2}$ där $C \neq 0$. Eftersom $y=2$ är en lösning så ger även fallet $C=0$ en lösning. Härav fås att $y(1-Ce^{x^2}) = 2$ där C är ett godtyckligt reellr tal; slutligen fås $y = \frac{2}{1-Ce^{x^2}}$ och BV ger $C=0$ så att sökt lösning är $y=2$.

3. Vi har $\lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)\ln(1+x^2)}{x(\cos x^2 - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)\ln(1+x^2)}{x(1-\frac{x^4}{2!}+\mathcal{O}(x^8)-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-(x-x^3/3!+\mathcal{O}(x^5)))(x^2+\mathcal{O}(x^4))}{-\frac{x^5}{2}+\mathcal{O}(x^9)} =$
$= \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^5))(x^2+\mathcal{O}(x^4))}{-\frac{x^5}{2}+\mathcal{O}(x^9)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3x^2(\frac{1}{6}+\mathcal{O}(x^2))(1+\mathcal{O}(x^2))}{x^5(-\frac{1}{2}+\mathcal{O}(x^4))} = \frac{\frac{1}{6}+0}{-\frac{1}{2}+0} = -\frac{1}{3}.$

4. a) Graferna skär varandra då $\sqrt{9+x^2} = 5 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$. Sökt volym är V$=\int_{-4}^{4} \pi 5^2\,dx - \int_{-4}^{4} \pi(\sqrt{9+x^2})^2\,dx = \pi\int_{-4}^{4} 16 - x^2\,dx = 256\pi/3$. b) Vi har $y' = x^{-1/3}(1+x^{2/3})^{1/2} \Rightarrow 1 + (y')^2 = x^{-2/3}(x^{2/3} + (1+x^{2/3}))$ så att
L$=\int_1^8 \sqrt{x^{-2/3}(x^{2/3}+(1+x^{2/3}))}\,dx = [t = x^{2/3}] = \frac{3}{2}\int_1^4 \sqrt{1+2t}\,dt = \frac{1}{2}[(1+2t)^{3/2}]_1^4 = \frac{3}{2}(9-\sqrt{3}).$

5. a) Upprepad PI ger att $I \equiv \int e^{2x}\cos x\,dx = \ldots = e^{2x}(\sin x + 2\cos x) - 4I$ så 'bootstrapping' ger $I = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)/5$.
b) Ekvationen är linjär så lösningen $y = y_p + y_h$. Karakteristiska ekvationen är $0 = r^2+4r+4 = (r+2)^2$ så $y_h = (Ax+B)e^{-2x}$. Ansätt $y_p = x^k(ax^2+bx+c)e^{2x} = [k=0] = (ax^2+bx+c)e^{2x}$ och derivering, insättning i ekvationen och identifikation av koefficienter ger $y_p = (x^2 - x + \frac{3}{8})e^{2x}$.

6. Kirchhoffs spänningslag ger $E = LI' + RI + \frac{1}{C} = [I = Q'] = LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q \Rightarrow Q'' + 3Q' + 2Q = 10$ som har lösning $Q = Q_p + Q_h$, och då karakteristiska ekvationen är $0 = r^2+3r+2 = (r+1)(r+2)$ har vi $Q_h = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$. Ansätt $y_p = x^kK = [k=0] = K$ som vid insättning ger $Q_p = 5$. Härav får vi $Q = 5 + C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} \to 5$ då $t \to \infty$. (Fysikaliskt argument; Vid jämvikt flyter ingen ström i kretsen så $I = 0 \Rightarrow I' = 0$ vilket ger $2Q_{\text{jämvikt}} = 10 \Rightarrow Q_{\text{jämvikt}} = 5 = \lim_{t\to\infty} Q(t)$.)

7. Vi skriver om enligt $y'' + \frac{3}{t}y' + \frac{1}{t^2}y = y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y + \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = [D \equiv \frac{d}{dt}] = D^2y + D(\frac{1}{t}y) + \frac{2}{t}(Dy + \frac{1}{t}y) = D(Dy + \frac{1}{t}y) + \frac{2}{t}(Dy + \frac{1}{t}y) = (D + \frac{2}{t})(Dy + \frac{1}{t}y) = (D + \frac{2}{t})(D + \frac{1}{t})y$ som med $z \equiv (D + \frac{1}{t})y$ ger ett ekvationssystem med två 1:a ordningens linjära ekvationer för z och y: $z' + \frac{2}{t}z = 16t\ln t$ och $y' + \frac{1}{t}y = z$ som alltså båda löses med (olika) IF vilket ger efter att ha löst för z, att $(D + \frac{1}{t})y = z = 4t^2\ln t - t^2 + \frac{C_1}{t} \Rightarrow y = t^3\ln t - \frac{1}{2}t^3 + C_1\frac{\ln t}{t} + \frac{C_2}{t}$, där $C_1,\ C_2$ är godtyckliga reella konstanter.

8. Se kursboken.