MATEMATIK
Chalmers

Tentamen Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137, 136)
Tid: 2019-01-16, kl 8.30 - 12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare. Telefonvakt: Felix Held, ankn. 5325.

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 p eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från läsåret 1819 inkluderas.) Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv137/1819/ och/eller utskick i Ping-Pong.

---

1. Beräkna integralerna: **a)** $\int xe^{x^2}\,dx$, **b)** $\int \sqrt{3x+4}\,dx$, **c)** $\int x\sin x\,dx$, (9p)
   d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$, **e)** $\int_0^{\infty} (x-2)e^{-x/2}\,dx$, **f)** $\int \tan^2 x\,dx$.

2. a) Lös om möjligt följande ODE: **a)** $y' - y = x, \quad y(0) = 0$, (6p)
   b) $xy' + y^2 = 0, \quad y(1) = 2$, **c)** $(x^2+1)y' - xy = \sqrt{x^2+1}$,
   d) $y'' - 4y = e^x$, **e)** $y'' - 4y = e^{2x}$.

3. Låt $f(x) = \sin(2x)\ln(4x^2+1)$. **i)** Bestäm för $f(x)$, Maclaurinpolynomet av grad 3, **ii)** Beräkna om möjligt $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$. (6p)

4. **a)** Bestäm den volym som området ovanför grafen till funktionen $y = \sqrt{9+x^2}$ och under grafen till funktionen $y = 5$ ger upphov till vid rotation runt x-axeln. **b)** Beräkna längden av funktionskurvan $y = \ln(1-x^2), \quad 0 \le x \le 1/2$. (3+3p)

5. Lös ODE:n $yy'' = (y')^2$ med hjälp av den nya funktionen $z(y) = \frac{dy}{dx}(x)$. (6p)

6. Antag att tangenten i punkten (x_0, y_0) till en kurva $y = f(x)$ i planet, skär linjen $y = 1$ för $x = \frac{1}{2}x_0$. Finn om möjligt dessa kurvor i planet. (6p)

7. Den linjära, homogena ekvationen $y'' + 2xy' + 2y = 0$ har ju inte konstanta koefficienter. Ett ansättande av lösningen y som ett polynom ger i vänsterledet ett polynom som ska vara lika med högerledet som är konstant 0. Det betyder att koefficienterna i västerledets polynom alla måste vara 0. Vi vet dock inte vilken grad den ansatta polynomlösningen ska ha. Ansätt därför en serielösning $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Insättning i ekvationen ger en (rekursiv) relation för koefficienterna a_k. Använd detta för att lösa BVP:et för ODE:n, där $y(0) = 1, \; y'(0) = 0$. Lösande innebär alltså att identifiera konstanterna a_k för olika k och skriva lösningen som en serie. Återstår att undersöka för vilka $x \in \mathbb{R}$ denna serie konvegerar (så att alltså funktionen/lösningen är definierad där). Detta behöver inte undersökas här (men med kvotkriteriet kan man bevisa att den funna serien är konvergent på hela $\mathbb{R}$). (6p)

8. **a)** Formulera och bevisa formeln för partiell integration, **b)** Visa att för termerna a_k i en konvergent serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gäller $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. (5p)

Maclaurinutvecklingar på baksidan, vgv.

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$