Lösningar till Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137) 2019-01-16

1. **a)** $\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}+C$, **b)** $\int \sqrt{3x+4}\,dx = [t=3x+4] = \frac{1}{3}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{9}t^{3/2}+C = \frac{2}{9}(3x+4)^{3/2}+C$, **c)** $\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \sin x + C$, **d)** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x\,dx = [\text{udda integrand, jämnt intervall}] = 0$, **e)** $\int_0^\infty (x-2)e^{-x/2}\,dx = [\text{PI}] = [(x-2)(-2)e^{-x/2}]_0^\infty - \int_0^\infty (-2)e^{-x/2}\,dx = -2(0-(-2)) + 2[-2e^{-x/2}]_0^\infty = -4-4(0-1) = 0$,
f) $\int \tan^2 x\,dx = [x=\arctan t] = \int t^2\frac{1}{t^2+1}\,dt = \int 1 - \frac{1}{t^2+1}\,dt = t - \arctan t + C = -x + \tan x + C$

2. **a)** Ekvationen är linjär med IF e^{-x} Det följer att $e^{-x}y = \int \frac{d}{dx}(e^{-x}y)\,dx = \int xe^{-x}\,dx = [\text{PI}] = x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})\,dx = -(x+1)e^{-x}+C \Leftrightarrow y = -(x+1)+Ce^x$ och BV ger att $C=1$. **b)** Ekvationen är separabel och $y=0$ är en potentiellt singulär lösning. Om $y\neq 0$ får vi $\int -\frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \frac{1}{y} = \ln|x|+C$ som ger att lösningarna är den allmänna lösningen $y = 1/(C+\ln|x|)$, $C\in\mathbb{R}$ och den singulära lösningen $y=0$. Den singulära uppfyller ej BV. Den sökta lösningen är den allmänna med $C=1/2$. **c)** Ekvationen är linjär med IF: $e^{\int \frac{-x}{x^2+1}\,dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Detta ger $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}y = \int \frac{d}{dx}(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}y)\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$ så att $y = \sqrt{x^2+1}(\arctan x + C)$. **d)** $y = y_p + y_h$. Kar. ekv. är $r^2-4=0 \Rightarrow r = \pm 2 \Rightarrow y_h = C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$. Ansätt $y_p = x^mCe^x = [\text{m}=0] = Ce^x$. Insättning i ekvationen ger $e^x = y_p''-4y_p = Ce^x - 4Ce^x \Rightarrow C = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}e^x + C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$. **e)** Så när som på y_p är lösningen densamma som för d). Ansätt nu $y_p = x^mCe^{2x} = [\text{m}=1] = Cxe^{2x}$. Insättning i ekvationen ger $e^{2x} = y_p''-4y_p = 4Ce^{2x}+4y_p-4y_p = 4Ce^{2x} \Rightarrow C = \frac{1}{4} \Rightarrow y = y_p+y_h = \frac{x}{4}e^{2x}+C_1e^{-2x}+C_2e^{2x} = C_1e^{-2x}+(\frac{x}{4}+C_2)e^{2x}$.

3. a) Entydighetssatsen ger att Maclaurinutvecklingen för $y(x) = \sin(2x)\ln(4x^2+1) = (2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5))(4x^2 - \frac{(4x^2)^2}{2} + \mathcal{O}(x^6)) = 8x^3 + \mathcal{O}(x^4)$, b) $\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3(8+\mathcal{O}(x))}{x^3} = \lim_{x\to 0} 8+\mathcal{O}(x) = 8+0 = 8$.

4. a) Graferna skär varandra då $\sqrt{9+x^2} = 5 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$. Sökt volym är V$=\int_{-4}^4 \pi 5^2\,dx - \int_{-4}^4 \pi(\sqrt{9+x^2})^2\,dx = \pi\int_{-4}^4 16-x^2\,dx = 256\pi/3$. b) L$=\int_0^{1/2}\sqrt{1+(\frac{1}{1-x^2}(-2x))^2}\,dx = \int_0^{1/2}\sqrt{\frac{(1-x^2)^2+4x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx = \int_0^{1/2}\sqrt{\frac{1+x^4-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx = \int_0^{1/2}\sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}\,dx = \int_0^{1/2}|\frac{1+x^2}{1-x^2}|\,dx = \int_0^{1/2}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx = -\int_0^{1/2}\frac{1+x^2}{x^2-1}\,dx = -\int_0^{1/2} 1 + \frac{2}{x^2-1}\,dx = -([x]_0^{1/2} + 2\int_0^{1/2}\frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx) = -(\frac{1}{2}+2\int_0^{1/2}\frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}\,dx) = -\frac{1}{2} - [\ln|\frac{x-1}{x+1}|]_0^{1/2} = \ln 3 - \frac{1}{2}$.

5. $y' = \frac{dy}{dx} = z(y) \Rightarrow y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(z(y)) = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$ $\quad\therefore yz\frac{dz}{dy} = z^2$. Vi ser att $z=0$ är en lösning $\Leftrightarrow$ $y' = \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow y(x) = C\in\mathbb{R}$. Antag $z\neq 0 \Rightarrow y\frac{dz}{dy} = z \Rightarrow \int\frac{1}{z}\,dz = \int\frac{1}{y}\,dy \Rightarrow \ln|z| = \ln|y| + C_1,\ C_1\in\mathbb{R} \Rightarrow |z| = e^{C_1}|y| \Rightarrow z = \pm e^{C_1}y = C_2y,\ C_2\neq 0 \therefore y' = C_3y,\ C_3\in\mathbb{R} \Rightarrow \int\frac{1}{y}\,dy = \int C_3\,dx \Rightarrow \ln|y| = C_3x+k,\ k\in\mathbb{R} \Rightarrow |y| = e^ke^{C_3x} \Rightarrow y = \pm e^ke^{C_3x} = C_4e^{C_3x},\ C_4\neq 0,\ \therefore y = Ae^{Bx},\ A,B\in\mathbb{R}$.

6. Antag att (x,y) är en punkt på tangenten $y = kx+m$. Då gäller att $k = f'(x_0) = \frac{y-y_0}{x-x_0}$ och då tangenten går genom punkten $(x,y) = (x_0/2,1)$ får vi för funktionskurvan $y(x) = f(x)$ att $y'(x_0) = \frac{1-y(x_0)}{\frac{1}{2}x_0 - x_0}$. Vi gör för enkelhets skull namnbyte $x\leftrightarrow x_0$, $y(x)\leftrightarrow y(x_0)$ och detta ger då $y' = \frac{y-1}{\frac{1}{2}x}$. Denna ekvation är linjär och även separabel, med lösning $y = 1+Cx^2$, där $C\in\mathbb{R}$.

7. Låt $y(x) = \sum_{n=0}^\infty a_nx^n \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^\infty a_nnx^{n-1} \Rightarrow xy' = \sum_{n=0}^\infty a_nnx^n$. Ytterligare derivering ger $y'' = \sum_{n=0}^\infty a_nn(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=2}^\infty a_nn(n-1)x^{n-2} = [k=n-2] = \sum_{k=0}^\infty a_{k+2}(k+1)(k+2)x^k$ Insättning i ekvationen ger nu $0 = y''+2xy+2y = \sum_{n=0}^\infty (a_{n+2}(n+1)(n+2) + 2a_nn + 2a_n)x^n \Rightarrow a_{n+2}(n+1)(n+2) + 2a_n(n+1) = 0, \quad n = 0,1,2,3,\ldots$. Från detta följer den

rekursiva relationen $a_{n+2} = -\frac{2a_n}{n+2}$. Vidare ger BV $y(0) = 1 \Leftrightarrow a_0 = 1,\ y'(0) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$. Detta ger direkt att de udda koefficienterna är 0, $a_{2n+1} = 0$. Beräkna de första jämna koefficienterna (här krävs rätt många för att se mönstret; till ca a_{12} eller så) vilket ger $a_{2n} = (-1)^n \frac{2^n}{n2^n} = \frac{(-1)^n}{n}$. (För att vara säker, bevisa med induktion; vi skippar det här.) Slutligen ser vi att $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n}$.

8. Se kursboken.