MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137)
Tid: 2014-04-25, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: John Bondestam-Malmberg, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från hösten 2013 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter tentamen.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv137/1213/

---

1. Ange och motivera svaren till följande frågor: a) Vilken typ av ODE är $xy' + x^2y = (x^2 + \sin x)\ln x$? b) Är följande en tredje ordningens linjär, inhomogen ODE $xy''' + x^2y'' + xyy' + 2y = \tan x$? c) Ange en andra ordningens icke-linjär ODE som löses av åtminstone $y = x\sin x$. (2+2+2p)

2. Lös differentialekvationerna (3+3p)

   a) $y' + \dfrac{2}{x}y = x^2$, b) $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 1$.

3. Härled Eulers metod för approximation av lösningen till begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'(x) &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$ Ge iterationsformeln explicit. (7p)

4. Beräkna om möjligt $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^{-x^2} - 1)\sin x}{x\ln(1 + x^2)}$. (6p)

5. Beräkna integralerna (3+4p)

   a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)\arctan(\ln(x))}{x}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{4x - 5}{x^3 - 7x^2 + 16x - 10}\,dx$.

6. Låt $a,\ b \geq 0$ och för $x \in [0, 2a]$, $f(x) = \begin{cases} b, & 0 \leq x < a \\ 2b, & a \leq x \leq 2a \end{cases}$. Låt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 2a,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$. Låt vidare omkretsen av D vara 4 och V_x repektive V_y vara volymen som D genererar vid rotation runt x-axeln respektive y-axeln. Bestäm b så att $V \equiv V_x \cdot V_y$ är maximal. (6p)

7. Lös ekvationen $y'' + y = \cos^2(\frac{x}{2})$. (6p)

8. Formulera och bevisa antingen formeln för variabelsubstitution i en bestämd integral eller formeln för partialintegration i en bestämd integral. (6p)

Lista med Maclaurinutvecklingar, nästa sida; vgv.

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$