MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137)
Tid: 2013-12-18, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Anders Martinsson, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från hösten 2013 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter tentamen.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv137/1213/

---

1. Beräkna a) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} x\cos(\pi x^2)\,dx$, b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^3+x^2}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln\sqrt{x}}\,dx$. (3+3+3p)

2. Lös differentialekvationen $y' = x + y$. (6p)

3. Härled Eulers metod för approximation av lösningen till begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'(x) &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$ Ge iterationsformeln explicit. (6p)

4. Beräkna om möjligt $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x\arctan(x)}{(\cos x - 1)^2}$. (6p)

5. Lös ekvationen $y'' + y = \cos^2(\frac{x}{2})$. (6p)

6. Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{d}{dx}\Big(\int_0^x \cos(tx)\,dt\Big)$. (6p)

7. Låt D vara området mellan två parallella plan på avståndet d och låt B vara bollen med radie R. Betrakta skärningen mellan dessa två mängder. Det är inte svårt att se med geometriska överväganden hur den mängd med maximal volym erhålls vid skärningen av dessa två mängder. Bevisa detta med analytiska metoder och finn så den maximala volymen då $d = R$. (6p)

8. Formulera och bevisa antingen formeln för variabelsubstitution i en bestämd integral eller formeln för partialintegration i en bestämd integral. (5p)

Lista med Maclaurinutvecklingar, nästa sida; vgv.

VA

MATEMATIK
Chalmers

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$