MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137)
Tid: 2013-08-30, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: John Bondestam Malmberg, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.(Bonuspoäng från hösten 2012 inkluderas.) Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv137/1213/

---

1. Beräkna

a) $\int x(x+1)\,dx$ b) $\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx$ c) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

(6p)

2. Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = -2y,\ y(0) = 2$. (6p)

3. Lös ekvationen $y'' + 4y = \sin(2x)$. (6p)

4. **a)** Ange en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter som har den allmänna lösningen $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$ (där konstanterna C_1 och C_2 är godtyckliga tal, som inte ingår i ekvationen), (6p)
b) Ange en ekvation med den allmänna lösningen $y = x^2+C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

5. Beräkna gränsvärdet (6p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - \sin(3x)}{3\arctan x - \arctan(3x)}.$$

6. Vid odling av en jästkultur är tillväxthastigheten proportionell mot mängden jäst. En sådan odling görs i en behållare från vilken man tappar ut a kg jäst per minut. Antag att mängden jäst från början är y_0 kg och att proportionalitetskonstanten är 0,4. Hur ska man välja a så att mängden jäst i behållaren hålls konstant? (6p)

7. Beräkna $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$. (6p)

8. Formulera och bevisa Analysens huvudsats. (8p)

Lista med Maclaurinutvecklingar, nästa sida; vgv.

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$