MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137)
Tid: 2013-04-05, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Jacob Leander, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från hösten 2012 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida 19/12.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv137/1213/

---

1. Beräkna a) $\displaystyle\int x^3(1-x)\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-3x^2+2x}\,dx$, c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$. (3+3+3p)

2. Beräkna $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ där y är lösningen till begynnelsevärdesproblemet $y' = -2xy + 2x,\ y(0) = 2$. (6p)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - 4y' + 3y = e^{2x},\ y(0) = y'(0) = 0$. (6p)

4. Låt γ vara den parametriserade kurvan $\gamma(t) = (\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2})$. Beräkna dess längd mellan punkten $(0, 1/3)$ och någon annan punkt på kurvan. (6p)

5. Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(\sin x - x)}{(1-\cos x)^2}$. (6p)

6. Lös integralekvationen $y(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x ty(t)\,dt$. (6p)

7. Omformulera differentialekvationen $y''' + \cos xy'' + 2\sin xy' - xy = g(x)$ som ett ekvationssystem av första ordningens ODE. (6p)

8. Bevisa att om $y' = 0$ på ett intervall I så är y konstant på detta intervall. (5p)

Lista med Maclaurinutvecklingar, nästa sida; vgv.

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$