MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137)
Tid: 2012-12-19, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Dawan Mustafa, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från hösten 2012 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida 19/12.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv137/1213/

---

1. Beräkna a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - x}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$, c) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$. (3+3+3p)

2. Lös differentialekvationen $y' = \dfrac{2}{x}y + x^2$. (6p)

3. Lös ekvationen $y'' + y' - 2y = -6xe^{-2x}$. (6p)

4. **a)** Ange en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter som har den allmänna lösningen $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$ (där konstanterna C_1 och C_2 är godtyckliga tal, som inte ingår i ekvationen), (3p)
   b) Ange en ekvation med den allmänna lösningen $y = x^2 + C_1e^x + C_2e^{-2x}$. (3p)

5. Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(3x)(\sin x - x)}{(\cos x - 1)^2}$. (6p)

6. En donut ligger som en slang" med tvärsnitt en cirkel med radie b längdenheter, centrerad runt en cirkel med radie $a > b$ längdenheter. Bestäm volymen av donuten. (6p)

7. Finn med hjälp av skarvning, en lösning y till den ordinära differentialekvationen $y' = 3y^{2/3}$, sådan att $y(-2) = -1$ och $y(3) = 1$. (6p)

8. Formulera och bevisa Integral- och differentialkalkylens huvudsats; formulera och bevisa bägge delarna, dvs existensen av primitiv funktion samt evalueringsformeln för en bestämd integral. (5p)

Lista med Maclaurinutvecklingar, nästa sida; vgv.

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$