MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV136)
Tid: 2011-12-14, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Oskar Hamlet tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från hösten 2011 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast 14/12.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv136/1112/

---

1. Beräkna **a)** $\displaystyle\int x\cos x^2\,dx$, **b)** $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,dx$, **c)** $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$. (2+3+3p)

2. Lös ekvationen $y' + 2xy - x = 0,\ y(0) = 1$. (6p)

3. Lös ekvationen $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}$. (6p)

4. Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - \sin(3x)}{3\arctan x - \arctan(3x)}$. (6p)

5. Beräkna $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx$. (6p)

6. a) Omformulera differentialekvationen $y''-x^2y'+y = g(x)$ som ett system av första ordningens ODE. (4p)
   b) Formulera stegning med Eulers framåtmetod för det erhållna systemet då $g(x) = 0$. Skriv alltså hur du givet ett approximativt värde av u i punkten x_n (alltså givet $u(x_n)$) erhåller ett värde i punkten x_{n+1} (alltså erhåller $u(x_{n+1})$). (2p)

7. Formulera och bevisa Integral- och differentialkalkylens huvudsats; formulera och bevisa bägge delarna, dvs existensen av primitiv funktion samt evalueringsformeln för en bestämd integral. (6p)

8. Avgör om den rotationsvolym som uppstår vid rotation av kurvan $c(t) = (x(t), y(t)) = ((\ln t)(2 + \cos\frac{1}{t}), \frac{1}{t^{1/2}}(2 + \sin\frac{1}{t})) \in \mathbb{R}^2$, $1 \le t < \infty$, runt x-axeln ger en ändlig begränsningsyta. (6p)

Lista med Maclaurinutvecklingar, nästa sida; vgv.

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$