Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E, TMV136

2011 04 29, kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.
Telefon: Oskar Hamlet, 0703-088304
För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Lösningar och besked om rättningen lämnas på kursens hemsida :
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv136/1011/
Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. Beräkna följande integraler

$$(\mathbf{a})\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx, \quad (\mathbf{b})\int \frac{1}{e^x+1}\,dx, \quad (\mathbf{c})\int \frac{\ln x\ \cos(5\ln x)}{x}\,dx$$

(9p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' - y = x^2$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. (5p)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y' + 5y = 10e^x,\ \ y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$ (6p)

4. Beräkna arean för området i planet som ligger över x-axeln, men under kurvan $y = x - x^2$. När området roterar runt x-axeln uppstår en kropp i rummet. Beräkna volymen av denna kropp. (6p)

5. Beräkna massan av kurvstycket $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $0 \le t \le 1$, som har densiteten t i punkten (x, y). (6p)

6. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\ln(1+x) - \frac{x^3}{2}}{(\sin^2 x)(1-e^{x^2})}.$$

(6p)

7. Undersök om integralen $\int_2^{\infty}\frac{1}{x(x-1)}\,dx$ är konvergent och beräkna denna ifall den konvergerar. (6p)

8. Formulera och bevisa regeln för partialintegration (Integration by parts). (6p)

VA

vgv

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$