Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E, TMV136

2010 12 15, kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.
Telefon: Oskar Hamlet, 0703-088304
För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Lösningar och besked om rättningen lämnas på kursens hemsida :
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv136/1011/
Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. Beräkna följande integraler

$$(\mathbf{a}) \quad \int_1^{\sqrt{2}} x(1+x^2)^3\,dx \qquad (\mathbf{b}) \quad \int x\sin^2 x\,dx \qquad (\mathbf{c}) \quad \int \frac{1}{x+x^2}\,dx$$

(9p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = (y^2-1)x^2$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 2$. (6p)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet
$y'' - 4y' + 3y = 2e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$ (6p)

4. Beräkna den volym som erhålls då området i $\mathbb{R}^2$ som begränsas av $y = \sqrt{x}\,e^x,\ y = 0$ och $x = 1$, roteras kring x-axeln, (5p)

5. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x\arctan x}{(1-\cos x)(e^x - 1 - x)}$$

(6p)

6. Bestäm integralen $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$. ($a \neq 0$ och $b \neq 0$ är konstanter.) (6p)

7. (a) Formulera begreppet **konvergens** för en serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ge exempel på en konvergent och en divergent serie. (3p)
   (b) Bevisa att för en konvergent serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gäller att $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (3p)

8. Finn om möjligt minimipunkter och maximipunkter för funktionen $F(x) = \int_0^{x^2-2x} \frac{1}{1+t^4}\,dt$. (6p)

VA

vgv

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$