Reglerteknik M3

Tentamen 2010-12-17

Tid: 08:30 – 13:30 Lokal: Hörsalsvägen

Kurskod: ERE033

Lärare: Knut Åkesson, tel 0701-749525

Läraren besöker tentamenssalen vid två tillfällen för att svara på eventuella frågor. Detta sker normalt sett en timme efter tentamensstart samt en timme före tentamens slut.

Tentamen omfattar totalt 30 poäng, där betyg tre fordrar 12 poäng, betyg fyra 18 poäng och betyg fem 24 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara tydligt motiverade.

Lösningsförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Granskning* av rättning sker den *13 januari* samt den *18 januari* kl 12.30 – 13.00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Reglerteknik M3 - Formelsamling
- Bodediagram
- Beta och Physics handbook, Standard Mathematical Tables, TEFYMA
- Chalmersgodkänd räknare alternativt valfri kalkylator med rensat minne, ej handdator.
- För Erasmusstudenter är lexikon, till och från svenska, tillåtet.

Inga anteckningar är tillåtna!

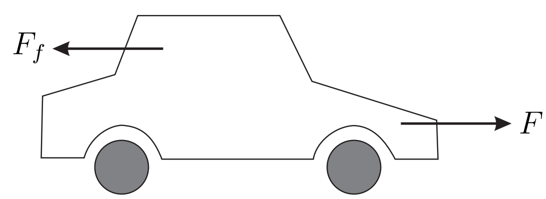
1

För att kunna designa en regulator behövs en modell över processen som ska styras. Nedan finns tre enkla system beskrivna och uppgiften är att bestämma överföringsfunktioner som relaterar de beskriva insignalerna till utsignalerna.

Du kan behöva göra antaganden som inte är redovisade i uppgiften – dessa ska vara rimliga och de ska redovisas.

Uppgiften består totalt av fem deluppgifter.

Process 1



Motorn i bilen ger upphov till en drivande kraft $F(t)$ som i sin tur påverkar bilens hastighet. $F_f(t)$ är en belastande kraft.

a) Betrakta process 1. Bestäm överföringsfunktionen från den drivande kraften F till bilens hastighet då $F_f = 0$.

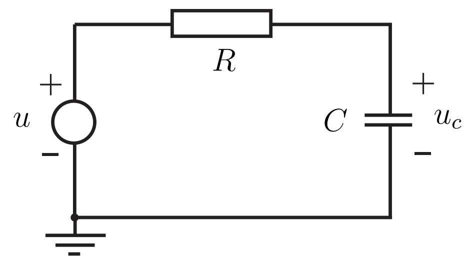
(1p)

b) Betrakta process 1. Bestäm överföringsfunktionen från den drivande kraften F till bilens acceleration då F_f är proportionell mot bilens hastighet.

(1p)

Uppgiften fortsätter på nästa sida!

Process 2

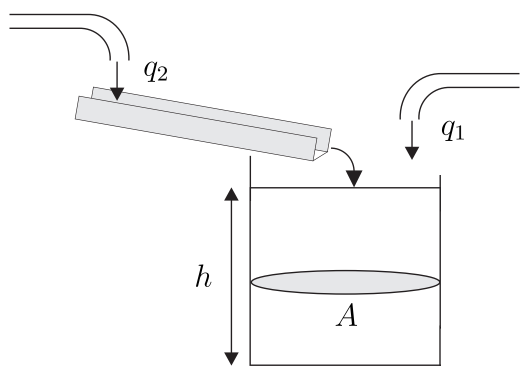


En RC-krets där insignalen är spänningen $u(t)$ och utsignalen spänningen över kondensatorn $u_c(t)$. Resistansen i motståndet är R, kapacitansen i kondensatorn är C.

c) Betrakta process 2. Bestäm överföringsfunktionen från den drivande spänningen u till spänningen över kondensatorn u_c.

(2p)

Process 3



En tank som fylls på från två håll och vi kan för tillfället antaga att inget rinner ut ur tanken. $q_1(t)$ och $q_2(t)$ är de två inflödena. Flödet $q_1(t)$ rinner direkt ner i tanken, medans flödet $q_2(t)$ rinner via en lång ränna, med konstant hastighet, för att först därefter rinna ner i tanken. Tanken är cylinderformat med arean A. Insignaler är $q_1(t)$ och $q_2(t)$ medans utsignalen är höjden $h(t)$ i tanken.

d) Betrakta process 3. Bestäm överföringsfunktionen från inflödet q_1 till höjden i tanken h.

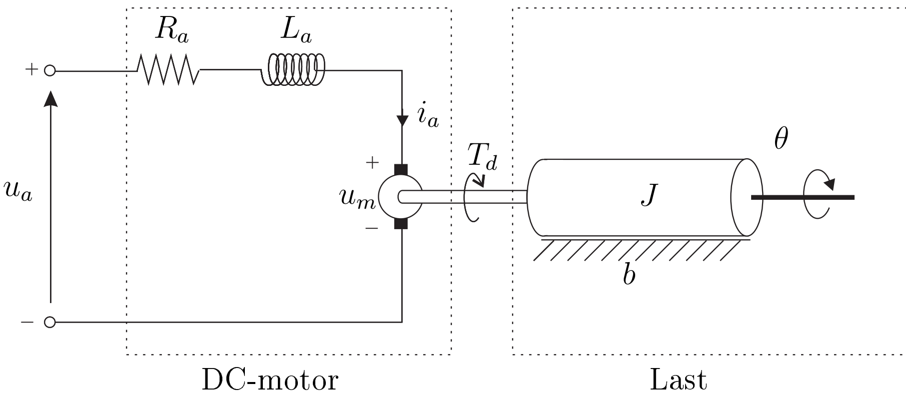
(1p)

e) Betrakta process 3. Bestäm överföringsfunktionen från inflödet q_2 till höjden i tanken h.

(1p)

2

En DC-motorer används ofta för att styra mekaniska system. Betrakta figuren nedan som föreställer en DC-motor med roterande last med viskös dämpning.



Då lasten roterar alstras en mot-emk $u_m = K_u\dot{\theta}$. Om induktansen i motorn L_a är liten kan överföringsfunktionen från u_a till θ skrivas som

$$\frac{\frac{K_m}{R_a}}{Js^2 + \left(\frac{K_m K_u}{R_a} + b\right)s}$$

Sätt konstanterna $J = K_m = R_a = 1$ och $K_u = b = 0.5$. Designa en regulator för processen ovan så att följande krav blir uppfyllda

1) Kvarstående felet ska vara maximalt 0.1 då börvärdet (dvs önskad rotationsvinkel på lasten) är en enhetsramp.

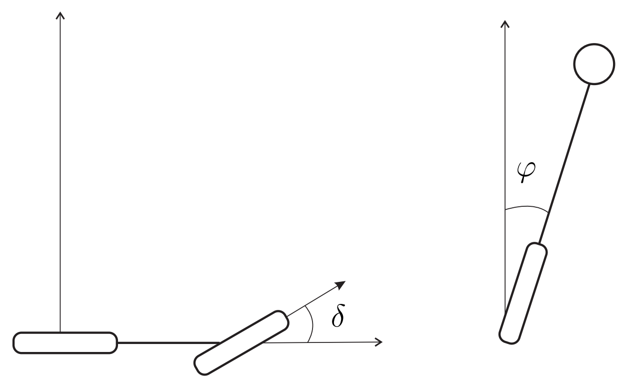
2) Fasmarginalen ska vara $\geq 45°$.

3) Överkorsningsfrekvens ska vara ≥ 4 rad/sek.

(4p)

3

Betrakta en vanlig cykel med styrning på framhjulet, låt δ vara vinkeln på styrhjulet, φ cykelns lutning och T det vridmoment som cyklisten använder för att vrida cykelstyret. Figuren nedan visar cykeln från ovan och bakifrån.



Genom modellering och linjärisering kring arbetspunkten ($\delta = 0$, $\varphi = 0$) fås följande linjära modell då vi bortser från föraren.

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}(t) = k_1\varphi(t) + k_2V_0\dot{\delta}(t) + k_3V_0^2\delta(t) \\ \delta(t) = -k_4\varphi(t) + k_5T(t) \end{cases}$$

I modellen ovan är $k_1, \ldots, k_5$ är konstanter, alla strikt större än noll, men vars exakta värde beror på cykelns utforming. $V_0 > 0$ är cykelns hastighet vilken vi antar vara konstant. Notera att dynamiken beror på cykelns hastighet.

a) Rita blockschema över systemet ovan. I blockschemat ska överföringsfunktionerna finns uttryckligen angivna och det ska tydligt framgå var det olika signalerna (φ, δ och T) finns, dvs blockschemat ska kunna helt ersätta differentialekvationerna ovan. Ledning: Låt överföringsfunktionen från δ till φ vara ett av blocken i blockdiagrammet.

(2p)

Uppgiften fortsätter på nästa sida!

b) Visa att överföringsfunktionen från vridmomentet T till cykelns lutning φ ges av

$$G_{T\varphi}(s) = \frac{k_2 k_5 V_0 s + k_3 k_5 V_0^2}{s^2 + k_2 k_4 V_0 s + k_3 k_4 V_0^2 - k_1}.$$

(2p)

c) Bestäm den lägsta hastighet V_0 (som funktion av $k_1, \ldots, k_5$) för att cykeln ska vara självstabiliserande (dvs inte ramla omkull).

(2p)

d) För att få en modell över en bakhjulsstyrd cykel kan vi ta modellen ovan men låta hastigheten V_0 vara negativ. Beräkna hur detta påverkar läget hos polerna och nollstället för överföringsfunktionen från δ till φ samt för överföringsfunktionen från T till φ. Förklara med utgångspunkt från detta om det är enklast att cykla på en framhjuls eller bakhjulsstyrd cykel.

(2p)

4

En regulator ska dimensioneras för en process med överföringsfunktionen

$$G_p(s) = \frac{2e^{-3s}}{(1+10s)(1+0.1s)}.$$

Lambda-metoden bygger på att processen approximativt kan beskrivas som en första ordningens process med dödtid, dvs

$$G(s) = \frac{Ke^{-T_d s}}{1+Ts}.$$

Önskemålet är att det återkopplade systemets överföringsfunktion $G_{ry}(s)$ ska bli

$$G_{ry}(s) = \frac{e^{-T_d s}}{1+\lambda T s}$$

där faktorn λ justeras så att önskad snabbhet för det återkopplade systemet erhålls.

a) Rita ett Bodediagram (amplitud och fasdiagram) för $G_p(s)$ och föreslå en approximativ första ordningens processmodell, förklara också varför det är en lämplig approximation av $G_p(s)$.

(3p)

b) Approximera dödtiden $e^{-T_d s}$ approximeras med $1 - T_d s$ (första ordningen Taylor serieutveckling). Vi har då att

$$G(s) \approx \overline{G}(s) = \frac{K(1-T_d s)}{1+Ts},$$

samt att

$$G_{ry}(s) \approx \overline{G}_{ry}(s) = \frac{1-T_d s}{1+\lambda T s}.$$

Visa att PI-regulatorn

$$F_{PI}(s) = \frac{1+Ts}{K(T_d+\lambda T)s}$$

ger det önskade återkopplade systemet $\overline{G}_{ry}(s)$ för processmodellen $\overline{G}(s)$.

(2p)

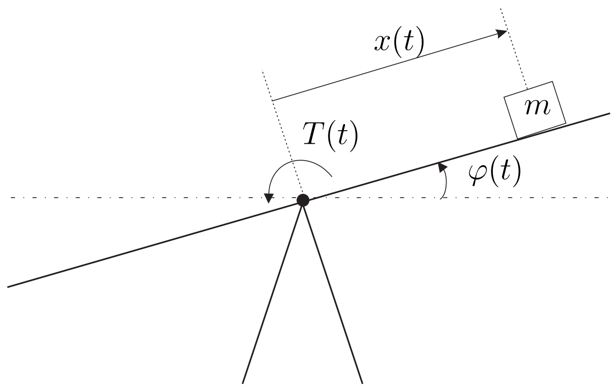
Uppgiften fortsätter på nästa sida!

c) Bestäm känslighetsfunktionen $S(s)$ då processmodellen är $\overline{G}(s)$ och regulatorn är $F_{PI}(s)$ enligt ovan, $S(s)$ är en funktion av de okända parametrarna T_d och λ. Kommentera reglersystemets förmåga att kompensera långsamma processtörningar som funktion av λ och dödtiden T_d.

(2p)

5

Betrakta figuren nedan där ett arbetsstycke med massan m förflyttas på ett lutande plan.



Låt avståndet från rotationscentrum till arbetsstycket vara $x(t)$ och vinkeln mellan horisontallinjen och planet vara $\varphi(t)$. Arbetsstyckets position styrs med hjälp av att reglera ett moment $T(t)$ applicerat kring rotationscentrum. Genom att ställa upp moment och kraftbalans får vi att

$$\begin{cases} mx^2(t)\ddot{\varphi}(t) = T(t) - mgx(t)\cos\varphi(t), \\ m\ddot{x}(t) = -mg\sin\varphi(t) + m\dot{\varphi}^2(t)x(t). \end{cases}$$

a) Bestäm en linjär tillståndsmodell som beskriver avvikelser kring jämviktsläget för godtycklig position x_0 på arbetsstycket.

(3p)

b) Bestäm överföringsfunktionen från momentet $T(t)$ till positionen $x(t)$ för avvikelser kring jämviktsläget.

(2p)

God Jul!

Lösningsförslag

1

a) Låt bilens massa vara m och dess hastighet vara $v(t)$. Newtons andra lag ger

$$m\dot{v}(t) = F(t).$$

Laplacetransformering ger

$$msV(s) = F(s),$$

vilket ger

$$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms}.$$

b) På samma sätt som i a), fast $F_f(t) = bv(t)$. Newtons andra lag ger

$$m\dot{v}(t) = F(t) - bv(t).$$

Laplacetransformering ger

$$(ms + b)V(s) = F(s).$$

vilket ger

$$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms + b}.$$

Accelerationen är tidsderivatan av hastigheten. Dvs $A(s) = sV(s)$, där $A(s)$ är laplacetransformationen av accelerationen, detta leder till att

$$\frac{A(s)}{F(s)} = \frac{s}{ms + b}.$$

b) Spänningen över motståndet ges av $Ri(t)$, spänningen över kondensatorn ges av $\int_0^t i(\tau)d\tau$. Kirchoffs ena lag ger att summan av spänningarna i en sluten krets ska vara 0. Dvs

$$u(t) - Ri(t) - \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = 0$$

För att lösa problemet behöver vi först beräkna strömmen. Laplacetransformering ger

$$U(s) = (R + \frac{1}{sC})I(s)$$

Detta ger att strömmen ges av

$$I(s) = \frac{sC}{RCs+1}U(s)$$

Nu kan vi beräkna spänningen över kondensatorn som

$$U_c(s) = \frac{1}{sC}I(s) = \frac{1}{sC}\frac{sC}{RCs+1}U(s) = \frac{1}{RCs+1}U(s)$$

c) Volymen i tanken är integralen av inflödet. Dvs

$$V(t) = \int_0^t q_1(\tau)d\tau$$

$$V(t) = Ah(t)$$

Vilket leder till att

$$h(t) = \frac{1}{A}V(t) = \frac{1}{A}\int_0^t q_1(\tau)d\tau$$

Laplacetransformering ger

$$H(s) = \frac{1}{As}Q_1(s).$$

d) Som uppgift d) med skillnaden att inflödet i tanken är fördröjd L sekunder, dvs

Volymen i tanken ges av

$$V(t) = \int_0^t q_2(\tau - L)d\tau$$

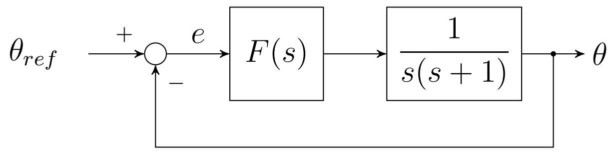
Laplacetransformering ger

$$H(s) = \frac{e^{-sL}}{As}Q_2(s).$$

2

Processen ges av

$$G_{u_a\theta} = \frac{1}{s(s+1)}$$



Uppgiften nämner inget om vilken regulatorstruktur vi ska använda, vi prövar med en enkel P-regulator, dvs $F(s) = K_p$.

I detta fall blir kretsöverföringen

$$L(s) = \frac{K_p}{s(s+1)}$$

$$G_{\theta_{ref}e} = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{s(s+1)}{s^2+s+K_p}$$

I uppgiften anges att θ_{ref} är en ramp, dvs $\theta_{ref}(s) = \frac{1}{s^2}$.

Vi få då att

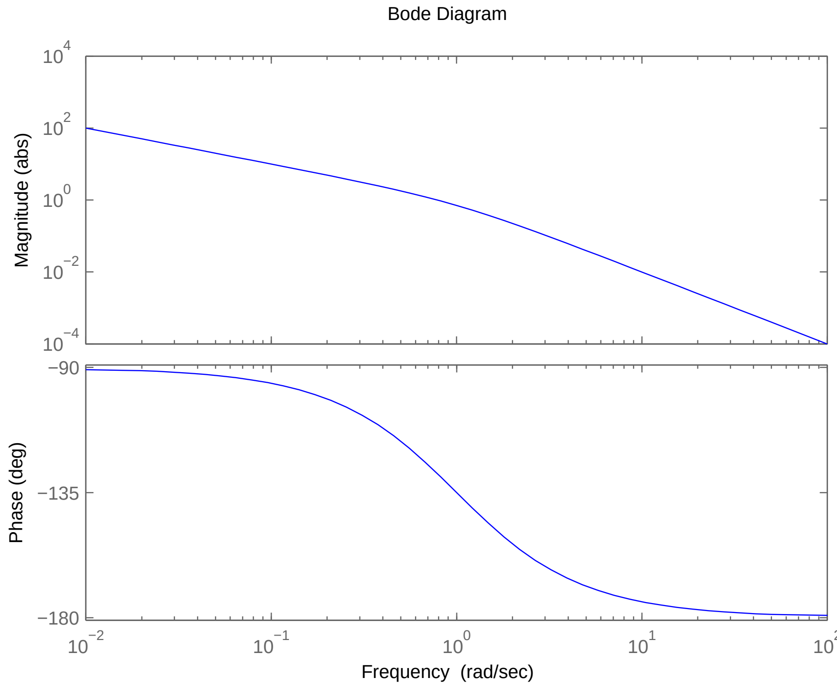
$$E(s) = G_{\theta_{ref}e}(s)\theta_{ref}(s).$$

För att få $\lim_{t\to\infty} e(t)$ så kan vi använda slutvärdessatsen (under förutsättning att överföringsfunktionen är stabil).

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to s} sE(s) = \lim_{s\to s} \frac{s+1}{s^2+s+K_p} = \frac{1}{K_p}$$

För att kvarstående felet ska vara mindre än 0.1 krävs därför att $K_p > 10$.

Rita Bodediagram över processen



Med $K_p = 10$ får vi ur Bodediagrammet att $\omega_c \approx 3$ rad/s och $\varphi_m \approx 45°$. Vi kan inte minska K_p får då uppfyller vi inte längre kravet på kvarstående fel, och ökar vi K_p så kommer bara fasmarginalen att minska ytterliggare.

Pröva med ett lead-filter (PD-regulator).

$$F(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}$$

Vi provar med överkorsningsfrekvens $\omega_c = 4$ rad/s och fasmarginal $\varphi_m = 45°$.

Förstärkning och fasvridning vid ω_c ges av

$$|G(j\omega_c)| = \frac{1}{\omega_c\sqrt{1+\omega_c^2}} \approx 0.06$$

$$\arg G(j\omega_c) = -90° - \arctan(4) \approx -166°$$

Från detta får vi att PD-regulatorn behöver lyfta fasen $45° - 14° = 31°$.

Vi får ur detta parametern b.

$$b = \frac{1 + \sin\varphi_{max}}{1 - \sin\varphi_{max}} = \frac{1 + \sin 31^\circ}{1 - \sin 31^\circ} \approx 3.1$$

Vi låter maximalt faslyft för PD-regulatorn inträffa vid överkorsningsfrekvensen.

$$\omega_c = \frac{\sqrt{b}}{\tau_d}$$

Ur detta kommer att $\tau_d = 0.44$. Återstår att ställa in K_p så att förstärkningen för kretsöverföringen blir exakt 1 vid överforsningsfrekvensen.

$$K_p = \frac{1}{0.06\sqrt{3.1}} \approx 9.4$$

Från beräkningen för kvarståendefelet för P-regulatorn så ser vi att vi kommer att få samma villkor på det kvarstående felet, dvs PD-regualtorn ovan ger ett kvarstående fel som är något över 0.1.

För att få ett mindre kvarståendefel men samtidigt behålla fasmarginalen så kan vi designa en mer aggressiv regulator genom att öka ω_c. Vi kan försöka med $\omega_c = 5$ rad/s, beräkningar enligt ovan.

Förstärkning och fasvridning vid ω_c ges av

$$|G(j\omega_c)| = \frac{1}{\omega_c\sqrt{1 + \omega_c^2}} \approx 0.039$$

$$\arg G(j\omega_c) = -90^\circ - \arctan(5) \approx -169^\circ$$

Från detta får vi att PD-regulatorn behöver lyfta fasen $45^\circ - 11^\circ = 34^\circ$.

Vi får ur detta parametern b.

$$b = \frac{1 + \sin\varphi_{max}}{1 - \sin\varphi_{max}} = \frac{1 + \sin 34^\circ}{1 - \sin 34^\circ} \approx 3.54$$

Vi låter maximalt faslyft för PD-regulatorn inträffa vid överkorsningsfrekvensen.

$$\omega_c = \frac{\sqrt{b}}{\tau_d}$$

Ur detta kommer att $\tau_d = 0.38$. Återstår att ställa in K_p så att förstärkningen för kretsöverföringen blir exakt 1 vid överforsningsfrekvensen.

$$K_p = \frac{1}{0.039\sqrt{3.54}} \approx 13.6$$

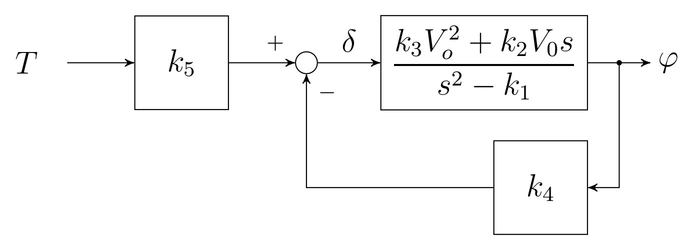
Dvs då

$$F(s) = 13.6\frac{1+0.38s}{1+0.1s}$$

så blir kvarståendefelet $\frac{1}{13.6} = 0.74$, överkorsningsfrekvensen blir $\omega_c = 5$ rad/s och fasmarginalen blir $45°$ därmed är alla krav uppfyllda.

3

a) Genom att Laplacetransformera de givna ekvationerna och titta på in- oc utsignalerna får vi följande blockdiagram.



b)

$$\varphi(s) = \frac{k_3V_o^2+k_2V_0s}{s^2-k_1}(k_5T(s) - k_4\varphi(s))$$

Lös ut $\varphi(s)$ och vi får att

$$\varphi(s) = \frac{k_2k_5V_0s + k_3k_5V_0^2}{s^2+k_2k_4V_0s+k_3k_4V_0^2-k_1}T(s).$$

c) Polerna ges av lösningarna till $s^2+k_2k_4V_0s+k_3k_4V_0^2-k_1 = 0$. För att denna ekvation inte ska ha rötter i HHP krävs att (inses exempelvis genom att använda Routh-Hurwitz) $k_2k_4V_0 > 0$ samt att $k_3k_4V_0^2 - k_1 > 0$. Eftersom alla k_i konstanter var positiva och V_0 är en positiv hastighet då vi cyklar framåt så är $k_2k_4V_0 > 0$ uppfyllt och kvar blir att kolla när $k_3k_4V_0^2 - k_1 > 0$. Vi får nu villkoret

$$V_0 > \sqrt{\frac{k_1}{k_3k_4}}.$$

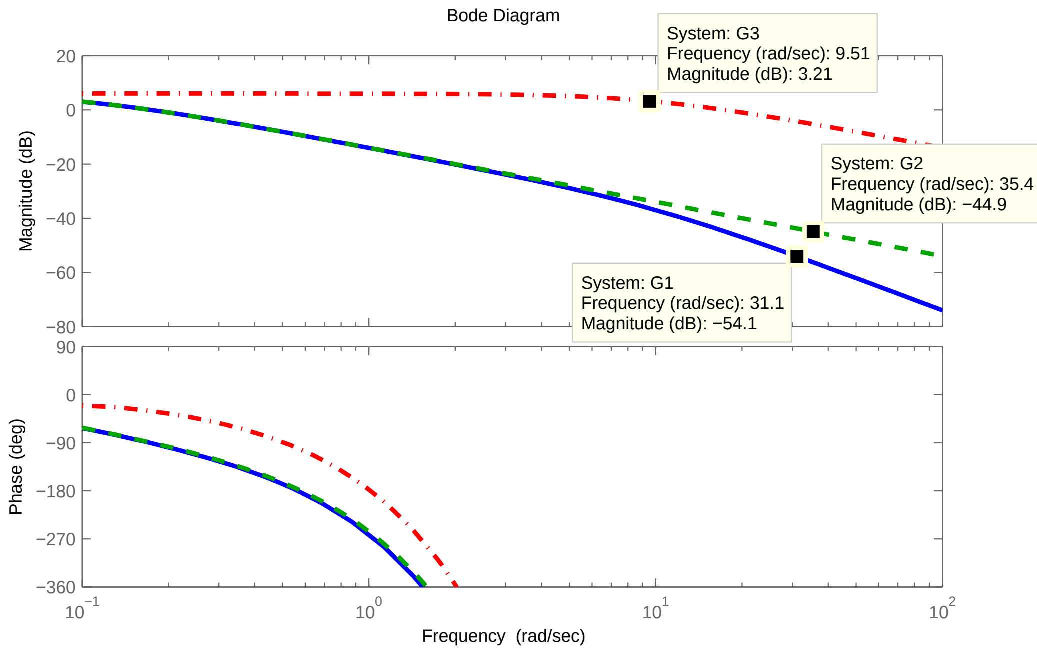
d) När V_0 ändrar tecken och vi därmed får en bakhjulsstyrdcykel så ser vi att nollstället för $G_{\delta\varphi}$ flyttar in i HHP, detta ger i sin tur upphov till att $G_{T\varphi}(s)$ också får ett nollställe i HHP men dessutom får en pol i HHP. $G_{T\varphi}(s)$ är därmed instabil för alla hastigheter vilket gör den mycket svårcyklad eftersom det nu blir upp till cyklisten att balansera cykeln.

4

a)

$$G_p(s) = \frac{2e^{-3s}}{(1+10s)(1+0.1s)} = \frac{\frac{200}{99}e^{-3s}}{1+10s} - \frac{\frac{2}{99}e^{-3s}}{1+0.1s}.$$

I figuren nedan är Bodediagrammen för $G_1 = G_p$, $G_2 = \dfrac{2e^{-3s}}{(1+10s)}$, samt $G_3 = \dfrac{2e^{-3s}}{(1+0.1s)}$ uppritade.



Vi ser från Bodediagrammet och partialbråksuppdelningen ovan att det är den långsammaste tidskonstanten (10) som dominerar. En lämplig approximation är därför

$$G(s) = \frac{2e^{-3s}}{(1+10s)}.$$

b) Vi har nu att

$$\overline{G}(s) = \frac{K(1-T_d s)}{1+Ts},$$

och att

$$F_{PI}(s) = \frac{1+Ts}{K(T_d+\lambda T)s}$$

Det återkopplade systemet ges nu av

$$\overline{G_{ry}}(s) = \frac{F_{PI}(s)\overline{G}(s)}{1+F_{PI}(s)\overline{G}(s)} = \frac{1-T_d s}{1+\lambda Ts}$$

c)

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} \frac{1}{1+F_{PI}(s)\overline{G}(s)} = \frac{(T_d+\lambda T)s}{1+\lambda Ts}$$

För låga frekvenser så är $1 + \lambda T s \approx 1$ och därför gäller att (för låga frekvenser)

$$S(s) \approx (T_d + \lambda T)s$$

Vi får nu att

$$|S(j\omega)| \approx (T_d + \lambda T)\omega$$

Dvs desto mindre $T_d + \lambda T$ är destom mindre kommer lågfrekventa processtörningar att påverka utsignalen, eftersom T_d och T är givna av processen så återstår att justera λ, mindre λ gör därmed att processtörningarna påverkar mindre. Värt att notera är också att detta innebär ett snabbare åetrkopplat system eftersom tidskonstanten för det återkopplade systemet minskar.

5

a) Inför tillstånden $z_1 = \varphi_1$, $z_2 = \dot{\varphi}_1$, $z_3 = x$, $z_4 = \dot{x}$ (vi använder här z för tillståndet istället för x eftersom x redan använts i uppgiftsformuleringen). Detta ger att

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= \frac{T}{mz_3^2} - \frac{g}{z_3}\cos z_1 \\
\dot{z}_3 &= z_4 \\
\dot{z}_4 &= -g\sin z_1 + z_2^2 z_3
\end{aligned}$$

Genom att beräkna jämviktspunkten får vi att

$$\begin{aligned}
0 &= z_{20} \\
0 &= \frac{T_0}{mz_{30}^2} - \frac{g}{z_{30}}\cos z_{10} \\
0 &= z_{40} \\
0 &= -g\sin z_{10} + z_{20}^2 z_{30}
\end{aligned}$$

Eftersom $z_{20} = 0$ så ger sista ekvationen ger att

$$z_{10} = n\pi,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Från ekvation två har vi att

$$T_0 = mgz_{30}\cos z_{10}$$

Skrivet på matrisform blir det

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta} z_1 \\ \dot{\Delta} z_2 \\ \dot{\Delta} z_3 \\ \dot{\Delta} z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g}{z_{30}}\sin z_{10} & 0 & -\frac{g\cos z_{10}}{z_{30}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g\cos z_{10} & 2z_{20}z_{30} & z_{20}^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mz_{30}^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T$$

Eftersom $\sin n\pi = 0$ då $n = 0, 1, \ldots$ och $\cos n\pi = \pm 1$ då $n = 0, 1, \ldots$ så får vi

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta} z_1 \\ \dot{\Delta} z_2 \\ \dot{\Delta} z_3 \\ \dot{\Delta} z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp\frac{g}{x_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mp g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mx_0^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \end{bmatrix}$$

b) Överföringsfunktionen ges av $C(sI - A)^{-1}B$. Alternativt kan man titta lite på ekvationerna. Vi har att

$$\ddot{\Delta}\varphi = \mp\frac{2g}{x_0^2}\Delta x + \frac{1}{mx_0^2}\Delta T$$

$$\ddot{\Delta} x = \mp g\Delta\varphi$$

Genom att derivera den under ekvationen med avseende på tiden två gånger kan vi sätta in uttrycket i den övre ekvationen får vi att

$$\pm\frac{d^4}{dt}\frac{\Delta x}{g} = \mp\frac{2g}{x_0^2}\Delta x + \frac{1}{mx_0^2}\Delta T$$

Överföringsfunktionen från ΔT till Δx ges därför av

$$\frac{\frac{1}{mx_0^2}}{\pm(\frac{1}{g}s^4 + \frac{2g}{x_0^2})}$$