1. Totalt finns $\binom{7}{3} = 35$ olika sätt att placera ut de tre bilarna på de sju platserna. Av dessa har 5 egenskapen att alla bilarna står bredvid varandra. Således är den sökta sannolikheten $p = 5/35 = 1/7 \approx 0.143$.

2. Att $A_1, \ldots, A_n$ partitionerar utfallsrummet Ω betyder att $A_i \cap A_j = \emptyset$ då $i \neq j$ och $\bigcup_i A_i = \Omega$. Vi får

$$P(B) = P\left(B \cap \bigcup_i A_i\right) = P\left(\bigcup_i B \cap A_i\right) = \sum_i P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$$

Den 3:e likheten följer ifrån axiomen för sannolikheter och den 4:e är en konsekvens av definitionen av betingning.

3. (a) $P(X = 2, Y = 1) = 0.06$, eftersom summan av alla sannolikheterna i tabellen måste bli 1.00. (b) $P(X = 2) = 0.05 + 0.06 + 0.10 + 0.06 = 0.27$ och $P(Y = 1) = 0.07 + 0.15 + 0.06 + 0.01 + 0.01 = 0.30$. (c) X och Y kan ej vara oberoende eftersom $P(X = 2)P(Y = 1) = 0.27 \cdot 0.30 = 0.081 \neq 0.06 = P(X = 2, Y = 1)$.

4. Medelst integration fås överlevnadsfunktionen $R(t) = e^{-\int_0^t r(s)\,ds} = e^{-0.4\,t^{2.5}}$. Således är (a) $P(T > 2) = R(2) = e^{-0.4 \cdot t^{2.5}} = 0.104$. Fördelningsfunktionen är $F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-0.4\,t^{2.5}}$. Således är (b) tätheten $f(t) = F'(t) = t^{1.5}\,e^{-0.4\,t^{2.5}}$. Den som kollar i formelsamlingen ser att detta är en Weibullfördelning med parametrar $\alpha = 0.4$ och $\beta = 2.5$.

5. (a) Låt $x_1, \ldots, x_n$ beteckna observationerna. Trolighetsfunktionen är

$$L(\alpha) = \prod_i f(x_i) = \prod_i \frac{\alpha}{2}\left(\frac{x_i}{2}\right)^{-(\alpha+1)} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n \left(\prod_i \frac{x_i}{2}\right)^{-(\alpha+1)}$$

och dess logaritm är $\mathcal{L}(\alpha) = n\ln(\alpha/2) - (\alpha+1)\sum_i \ln(x_i/2)$. Sedvanligt sökande efter maximum ger nu

$$\frac{d\mathcal{L}(\alpha)}{d\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{\alpha} - \sum_i \ln(x_i/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{n}{\sum_i \ln(x_i/2)}$$

Insättning av observationerna ger nu att trolighetsskattningen av α är $\widehat{\alpha} = 5.837$. Ett annat sätt att lösa uppgiften är att beräkna momentskattningen av α. Då behövs

$$E[X] = \int_2^\infty x f(x)\,dx = \int_2^\infty \alpha 2^\alpha x^{-\alpha}\,dx = \frac{2\alpha}{\alpha - 1}$$

förutsatt att $\alpha > 1$. Momentskattningen existerar alltså bara om $\alpha > 1$. Den fås genom att lösa ut α ur likheten $\bar{x} = E[X]$. Vi får

$$\bar{x} = \frac{2\widehat{\alpha}}{\widehat{\alpha} - 1} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\alpha} = \frac{\bar{x}}{\bar{x} - 2} = \frac{2.37875}{2.37875 - 1} = 6.281$$

(b) Lättast är nog att helt enkelt skatta p med antalet observationer över 2.50 delat med totala antalet observationer. Då fås $\hat{p} = 2/8 = 0.25$. (Denna skattning är väntevärdesriktig.) Den som skattat α kan ju beräkna $P(X > x) = \int_x^\infty f(x)\,dx = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha}$ och sedan skatta p med

$$\hat{p} = 1.25^{-\widehat{\alpha}} = 0.272 \quad \text{resp} \quad 0.246$$

beroende på typ av skattning som gjorts i deluppgift (a).

6. Räkna först ut att $\bar{x} = 10.41$, $s = 0.5043$. I t-tabellen (9 frihetsgrader) avläser vi $P(T > 3.25) = 0.005$. (Obs: $0.005 + 0.005 = 0.01$ och $1 - 0.99 = 0.01$.) Således gäller att $\mu = 10.41 \pm 3.25 \cdot 0.5043/\sqrt{10} = 10.41 \pm 0.52$ USD/liter.

7. Vi ska se om testet av $H_0 : \mu \leq 400$ mot $H_1 : \mu > 400$ förkastar på någon rimligt låg nivå. Vi jämför då teststatistikans utfall $(\bar{x} - \mu_0)/(s/\sqrt{n}) = 28.1/(30.31/\sqrt{7}) = 2.453$ med kvantilerna i t-fördelningen med 6 frihetsgrader. En titt i tabellen ger att utfallets P-värde är aningen mindre än 0.025 ($t_{0.025} = 2.450 < 2.453$). Testet förkastar alltså på nivån 5%, men ej på nivån 1%. Om det ej finns någon anledning att kräva osedvanligt hög säkerhet, så kan man påstå att det uppmätta medelvärdet är signifikant större än 400. M.a.o, man kan alltså påstå att åkern är kväverik ($\mu > 400$) och felrisken är då $\leq 5\%$.

8. Slå upp linjär regression i formelsamlingen och följ med. Modellen är $y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$, där $\epsilon \sim \mathrm{N}(0, \sigma)$. Ur data fås $\bar{x} = 400$, $\bar{y} = 5$, $S_{xx} = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = 100000$, $S_{yy} = \sum_i (y_i - \bar{y})^2 = 9.7$ samt $S_{xy} = \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 980$. Vi kan nu bestämma skattningarna av β_0 och β_1. De är

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{980}{100000} = 0.0098, \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 1.08$$

Vi kan nu beräkna de s.k. residualerna $\hat{\epsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$, där $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$:

x	200	300	400	500	600
y	3.00	3.90	5.20	6.10	6.80
$\hat{y}$	3.04	4.02	5.00	5.98	6.96
$\hat{\epsilon}$	−0.04	−0.12	0.20	0.12	−0.16

och fortsätter med skattningen av σ, som fås ur $s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_i \hat{\epsilon}_i^2 = 0.032 \approx 0.1789^2$. Punktskattningen av nötningen vid 400 Fahrenheit är $\hat{y} = 5.00$. I formelsamlingen ser vi att denna variabel är $\mathrm{N}\left(\beta_0 + \beta_1 x, \sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}}}\right)$, där $x = 400$. Vi utnyttjar att $x = \bar{x}$ och konstaterar att konfidensintervallet för y vid 400 Fahrenheit ges av $y = \hat{y} \pm t_{0.025}(n-2)s/\sqrt{n}$. Antalet frihetsgrader i skattningen s^2 av σ^2 är ju $n-2$. I lämplig tabell avläser vi $t_{0.025}(3) = 3.18245$. Således intervallskattningen av y vid 400 Fahrenheit lika med 5.00 ± 0.25.