Chalmers
Matematiska vetenskaper

TMS051: Matematisk statistik för Z, del B

Tentamen 14 april 2004 fm V

Tillåtna hjälpmendel är räknedosa utan information om kursen i minnena, Beta samt kursens formel- och tabellsamling.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p.

Jour och examinator är Tommy Norberg, ankn 3528 eller 0730 794209.

Observera att ofullständiga uträkningar eller motiveringar till resultat eller beräkningar lätt leder till poängavdrag för den som har ambitionen att uppnå betyget 4:a eller bättre.

Uppgifter

1. En standard kortlek består av 52 kort indelade i fyra färger om 13 kort i varje. Varje färg innehåller kort av valören 2–14. Beräkna sannolikheten att en hand bestående av fem slumpvis utvalda kort

   (a) bara innehåller kort ur samma färg, (2 p)

   (b) innehåller tre kort av en valör och två kort av en annan valör. (2 p)

2. Skriv ned de tre sannolikhetsaxiomen samt bevisa att additionsregeln

   $$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

   gäller för två godtyckliga händelser A_1, A_2. (4 p)

3. En mekaniskt systems livslängd antas följa en s.k Weibull-fördelning med parametrar $\alpha, \beta > 0$. Beräkna systemets felintensitet (”hazard rate”). Ledning: Weibull-fördelningens täthet är

   $$f(t) = \alpha\,\beta\,t^{\beta-1}\,e^{-\alpha t^{\beta}}$$

   för $t > 0$. (4 p)

4. Följande ”computation formula” gäller för kovariansen:

   $$\mathrm{Cov}[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

   Visa den. Argumentera sedan för påståendet att $\mathrm{Cov}[X,Y] = 0$ om X, Y är oberoende. (3 p)

(Vänd!)

En tillverkare av säkringar påstår, för en viss modell, att om överbelastningen är 20%, så löser säkringen ut efter 12.40 minuter i medel. För att undersöka detta påstående gjordes ett slumpmässigt urval av 20 säkringar ur ett stort parti. Dessa 20 säkringar utsattes för 20% överlast och man mätte tiden tills säkringen bröt. Därvid erhölls medelvärdet 13.88 minuter och standardavvikelsen 2.48 minuter. Resultatet av detta experiment ska analyseras i de tre följande upgifterna. Analysen ska göras under antagandet att tiden tills dess att en säkring bryter är (åtminstone approximativt) normalfördelad med väntevärdet μ och standardavvikelsen σ.

5. Man är intresserad av den tid $t_{0.99}$, som är sådan att 99% av alla säkringar som är utsatta för 20% överlast bryter innan och 1% efter. Tyvärr går den inte att räkna ut enbart utifrån tillverkarens uppgifter och man vill därför passa på att skatta den. Beräkna en rimlig skattning av $t_{0.99}$. (4 p)

6. (a) Intervallskatta σ uppåt. (2 p)

   (b) Intervallskatta μ symmetriskt. (2 p)

   I båda fallen ska konfidensen vara ca 95%.

7. Antag att du p.g.a tidigare negativa erfarenheter har anledning att misstro tillverkarens uppgift att säkringarna i medel bryter efter 12.40 minuter och att du nu vill utnyttja resultatet av detta experiment till att visa att säkringarna i verkligheten bryter senare. Formulera lämpligt hypotestest och utför detta på nivån 1%. (4 p)

8. Vid ett senare tillfälle gjordes en större studie av tiden tills dess att en säkring bryter vid 20% överlast. Därvid belastades 100 säkringar samtidigt med 20% överlast. Man fann efter 16 minuters testtid att 70 st hade brutit sina resp kretsar. Punkt- och intervallskatta sannolikheten p_{16} att en säkring utsatt för 20% överlast fungerar kortare tid än 16 minuter. (3 p)

Lycka till!