1. Obs först att $T = n \Leftrightarrow X_1 = A, \ldots, X_{n-1} = A, X_n \neq A$. Således gäller

$$P(T = n) = P(X_1 = A, \ldots, X_{n-1} = A, X_n \in \{B, C\})$$

$$= P(X_1 = A, \ldots, X_{n-1} = A, X_n = B) + P(X_1 = A, \ldots, X_{n-1} = A, X_n = C)$$

Den första av dessa två sannolikheter är lika med

$$p_{AA} \cdot \ldots \cdot p_{AA} \cdot p_{AB} = p_{AA}^{n-1} p_{AB}$$

ty de $n-1$ första transitionerna är ifrån A till A och den n:te transitionen är ifrån A till B. Ett analogt uttryck gäller för den andra sannolikheten ovan. Härur följer att

$$P(T = n) = p_{AA}^{n-1} p_{AB} + p_{AA}^{n-1} p_{AC} = p_{AA}^{n-1}(1 - p_{AA})$$

Denna typ av fördelning brukar kallas geometrisk. Att tiden tills kedjan lämnar sitt tillstånd är geometrisk gäller allmänt för Markovkedjor.

2. Vi ska beräkna stationär fördelning för en Markovsk kö med $c = 2$ betjäningsstationer och maximalt $K = 3$ jobb. Markovprocessens generator är

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & -(2\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 2\mu & -2\mu \end{bmatrix}$$

Vi får nu, för stationära fördelningen $\mathbf{p} = [\, p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3 \,]$,

$$\mathbf{pG} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ \lambda p_0 - (\mu+\lambda) p_1 + 2\mu p_2 = 0 \\ \lambda p_1 - (2\mu+\lambda) p_2 + 2\mu p_3 = 0 \\ \lambda p_2 - 2\mu p_3 = 0 \end{cases}$$

Den första ekvationen ger $p_1 = (\lambda/\mu) p_0$. Sättes detta in i den andra ekvationen fås $p_2 = (\lambda^2/(2\mu^2)) p_0$ och stoppar vi in detta i den sista ekvationen fås $p_3 = (\lambda^3/(4\mu^3)) p_0$. Värdet av p_0 fås nu ur sambandet $p0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Vi erhåller

$$p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0 + \frac{\lambda}{2\mu^2} p_0 + \frac{\lambda^3}{4\mu^3} p_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{4\mu^3} \right]^{-1}$$

3. Nodernas effektiva belastning får vi genom att lösa λ_1 respektive λ_2 ur

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \gamma_1 + 0.25\lambda_1 + 0.2\lambda_2 \\ \lambda_2 &= 0.5\lambda_1 + 0.2\lambda_2 \end{aligned}$$

Lösningen är $\lambda_1 = 8\gamma_1/5$, $\lambda_2 = \gamma_1$. Detta betyder att nodernas respektive trafikintensiteter är $\rho_1 = \lambda_1/(2\mu_1) = \gamma_1/5$ och $\rho_2 = \lambda_2/\mu_2 = \gamma_1/10$. Men stationär fördelning för en M/M/c-kö existerar bara då dess $\rho < 1$, så vi sluter oss till att $\gamma_1 < 5$. Det är ju bara precis då som båda noderna opererar stationärt.

4. Vi har här en Markovkedja med tillståndsrum $E = \{1, 2, k, g\}$ och transitionsmatris

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.50 & 0.25 & 0 \\ 0.20 & 0.20 & 0.10 & 0.50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transienta tillstånd är $1, 2$ och transitionsmatrisens restriktion till dessa tillstånd är

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.50 \\ 0.20 & 0.20 \end{bmatrix}$$

Tillstånden k, g är båda absorberande, så de bildar var sinn irreducibel delmängd av E. Den

b-vektor som svarar mot $\{g\}$ är

$$\mathbf{b}_g = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Jämför med sats 2.19. Vi räknar ut att

$$(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.6 & 1 \\ 0.4 & 1.5 \end{bmatrix}$$

och enligt satsen är

$$F(1,g) = (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{b}_g(1) = 0.5$$

(Korrekt uträkning av $F(1,g)$ renderar 2 p.) Antag nu att man processar n enheter. Låt X vara antalet godkända. Då är $X \sim \text{Bin}(n, 0.5)$, vilket ger att $E[X] = 0.5n$ och $\text{Var}[X] = 0.25n$.

(a) $0.5n = 100 \Rightarrow n = 200$.

(b) Medelst normalapproximation (med halvtalskorrektion) får vi att

$$0.95 = P(X \geq 100) \approx 1 - \Phi\left((99.5 - 0.5n)/\sqrt{0.25n}\right)$$
$$\Rightarrow (99.5 - 0.5n)/\sqrt{0.25n} = -1.645 \Rightarrow n = 224$$

Inget poängavdrag görs för den som ej använder halvtalskorrektion och istället får $n = 225$. Den som räknar exakt bör få $P(X \geq 100) = 0.946$ då $n = 223$ och $P(X \geq 100) = 0.953$ då $n = 224$. Korrekt svar är alltså $n = 224$.

5. Tillståndet 5 är absorberande (ty 1:an i diagonalen). Tillstånden 2 och 6 bildar en irreducibel sluten mängd (ty 6 är det enda tillstånd utöver 2 som kedjan kan hoppa till ifrån 2 och 2 är det enda tillstånd utöver 6 som kedjan kan hoppa till från 6). Tillståndet 1 är transient (ty ifrån 1 kan kedjan hoppa till det absorberande tillståndet 5). Då är också tillstånden 3 och 4 transienta (ty kedjan kan hoppa ifrån 4 till 3 och ifrån 3 till 1)).

6. Man ska helt enkelt lösa ut x ur ekvationen $u = F(x)$, så vi gör det:

$$u = \exp\left[-e^{-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \ln u = -e^{-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(-\ln u) = -\frac{x-\beta}{\alpha}$$

Vi ser att

$$x = \beta - \alpha \ln(-\ln u)$$

Om $\beta = 0, \alpha = 1$ och $u = 0.894468$ får vi det simulerade utfallet

$$x = -\ln(-\ln 0.894468) = 2.19$$

7. Lös först $\mathbf{pG} = 0$ för att få fram att stationära fördelningen är $\mathbf{p} = [0.25 \quad 0.5 \quad 0.25]$. Intäktsvektorn är $\mathbf{f} = [14 \quad 10 \quad 16]^t$ och transitionskostnader lägger vi i matrisen

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Enligt Property 4.7 i Feldman & Valdez-Flores gäller att medelintäkten per tidsenhet är $\mathbf{pf} - \mathbf{p}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1}$. Vi får att $\mathbf{pf} = 0.25 \cdot 14 + 0.5 \cdot 10 + 0.25 \cdot 16 = 12.50$, samt att

$$\mathbf{p}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1} = [0.25 \quad 0.5 \quad 0.25] \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [0.25 \quad 0.5 \quad 0.25] \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} = 11.00$$

Totala intäkten blir alltså $12.50 - 11.00 = 1.50$ kr per tidsenhet.

8. Detta är en födelse- och dödsprocess med tillstånden $\{0, 1, 2, 3\}$. Födelseintensiteter är $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ och dödsintensiter är $\mu_1 = 1/3, \quad \mu_2 = \mu_3 = 2 \cdot 1/3 = 2/3$. Vi erhåller (j f r (5.21) i Feldman & Valdez-Flores) för stationära fördelningen $\mathbf{p} = [p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3]$, $p_1 = p_0 \cdot \lambda_0/\mu_1 = p_0 \cdot 3/2$, $p_2 = p_1 \cdot \lambda_1/\mu_2 = p_0 \cdot 3/2 \cdot 3/4 = p_0 \cdot 9/8$, $p_3 = p_2 \cdot \lambda_2/\mu_3 = p_0 \cdot 9/8 \cdot 3/4 = p_0 \cdot 27/32$.

Från $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$ drar vi nu slutsatsen $p_0 = 32/143$, $p_1 = 48/143$, $p_2 = 36/143$ och $p_3 = 27/143$ (den som klarar detta har 1 p). Antag att varje färdigreparerad bil i medel ger intäkten x kr. Enligt Sats 4.7 i Feldman & Valdez-Flores (se också föreläsningsanteckningarna) ska vi bilda en "hopp-intäkts"-matris

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{bmatrix}$$

(det är ju bara transitionerna $1 \to 0$, $2 \to 1$ och $3 \to 2$ som ger någon intäkt). Sats 4.7 ger nu att medelintäkten per timma är

$$\mathbf{p}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1} = \begin{bmatrix} \frac{32}{143} & \frac{48}{143} & \frac{36}{143} & \frac{27}{143} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2x}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2x}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{58x}{143}$$

Balans har vi då utgifterna är lika med inkomsterna, d v s då $410 = 58x/143$. Enda lösning till denna ekvation är $x = 410 \cdot 143/58 = 1010.86$ kr. Verkstaden ger alltså ett överskott om intäkten per bil i medel är större än 1011 kr. Om verkstaden hade kunnat ta emot alla ankommande jobb, skulle medelintäkten per timma bli $x/2$ och då hade balans mellan inkomster och utgifter fåtts för $x = 820$ kr.