

TMS050: Matematisk statistik och simuleringsteknik Z, del B

Tentamen Z3 23 april 2003 fm V

Inga hjälpmedel är tillåtna på teoridelen, som ska lämnas in för sig.

Tillåtna hjälpmedel på problemdelen är räknedosa utan information om kursen i minnena, Beta, kursens formel- och tabellsamling samt läroboken Feldman & Valdez-Flores: Applied Probability and Stochastic Processes.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p.

Teoriuppgifter

- 1) Låt $X = \{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ vara en Markovkedja med tillståndsrum $E = \{a, b, c\}$ och transitionsmatris \mathbf{P} . Antag att kedjan vid tidpunkten n befinner sig i tillståndet c . Låt T vara tidpunkten då kedjan för första gången efter tidpunkten n befinner sig någon annanstans och sätt $S = T - n$. Härled sannolikhetsfördelningen för S . (4 p)
- 2) Betrakta en Markovkedja med tillståndsrummet $E = \{a, b, c, d, e, f\}$. Om transitionssannolikheterna p_{ij} , $i, j \in E$ vet man att

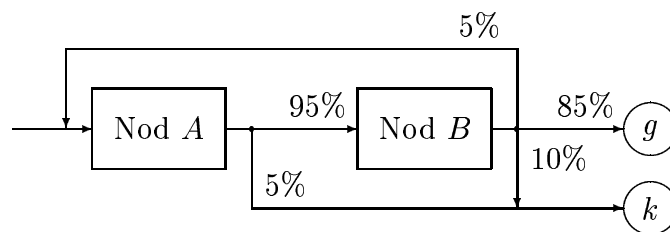
$$p_{ad} p_{ae} p_{bb} p_{bf} p_{ca} p_{cc} p_{cd} p_{db} p_{dc} p_{ee} p_{fb} p_{ff} > 0$$

samt att alla övriga är $= 0$. Klassificera tillstånden. (3 p)

- 3) Berätta vad som karakteriserar ett s.k Jackson-nät. (4 p)

Övriga uppgifter

- 4) Betrakta tillverkningsystemet specificerat av nedanstående figur. Slumpmekanismen som bestämmer hur enheterna skyfflas omkring i systemet antas vara Markovsk.



- (a) Beräkna förväntat antal gånger en godtycklig enhet bearbetas i nod A resp nod B.
- (b) Beräkna sannolikheten att en godtycklig enhet blir godkänd g resp kasserad k .
- (c) Varje råämne kostar 100 kr. Bearbetning i nod A och nod B kostar 200 kr resp 400 kr. Varje kasserad enhet kostar 500 kr och varje godkänd enhet ger en intäkt om 3200 kr. Låt C vara vinsten per tillverkad enhet. Beräkna $E[C]$. (4 p)

(Vänd!)

- 5) Betrakta Markovkedjan $X = \{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ med tillståndsrum $E = \{1, 2, 3\}$ och transitionsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 \\ 2/10 & 7/10 & 1/10 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Beräkna kedjans stationära fördelning (4 p)

- 6) Ett sätt att specificera Paretofördelningen är att ange att tätheten är

$$f(x) = \frac{\alpha}{x_0} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\alpha-1} \quad \text{för } x > x_0$$

där $x_0 > 0$ och $\alpha > 0$ är parametrar vars värden bestäms av tillämpningen. Låt u vara ett (datorgenererat) slumpstal. Härled ett uttryck med vilket man kan omvandla u till en simulerad observation x av Pareto(x_0, α)-fördelningen. (4 p)

- 7) En Markovprocess i kontinuerlig tid har generatoren

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 & -1 \end{bmatrix}$$

Tillståndsrummet är $E = \{a, b, c\}$. Kostnaden för processen är då den befinner sig i tillstånd a , 7 kkr per tidsenhet, då den är i tillstånd b , 5 kkr per tidsenhet och då den är i tillstånd c , 8 kkr per tidsenhet. Att byta tillstånd mellan a och b kostar 5 kkr, mellan a och c 8 kkr och mellan b och c 10 kkr. Beräkna processens totala kostnad per tidsenhet i det långa loppet. (3 p)

- 8) En nod i ett tillverkningsystem tänker man sig fungerar som en M/M/1-kö med i snitt 35 ankomster per timma och genomsnittlig betjäningstid 90 sekunder. Av utrymmesskäl måste man införa en begränsning K av det totala antalet enheter som samtidigt befinner sig inne i noden. Sök ett värde på K , sådant att noden är fylld och ankommande enheter avvisas under ca 5% av tiden tillverkningssystemet är i drift. (4 p)