9) $P\{S = k|X_n = c\} = P\{T = n+k|X_n = c\} = P\{X_{n+1} = c, \dots, X_{n+k-1} = c, X_{n+k} \neq c|X_n = c\} = P\{X_1 = c, \dots, X_{k-1} = c, X_k \neq c|X_0 = c\} = p_{cc}^{k-1}(1-p_{cc})$, där $p_{cc} = P\{X_1 = c|X_0 = c\}$.

10) Detta är problem nr 4 den 14/12-02 något omformulerad. Poängen med denna uppgift är att klassificeringen av tillstånden beror bara på vilka transitionssannolikheter som är > 0, d.v.s. vilka de möjliga transitionerna är. Rita tillståndsdiagram. Tillståndet e är absorberande ty $p_{xe} = 0$ för $x \neq e$ och $p_{ee} > 0$, så vi måste ha en 1:a i diagonalen i femte raden. Tillstånden b och f bildar en irreducibel sluten mängd ty f är det enda tillstånd utöver b som kedjan kan hoppa till ifrån b och b är det enda tillstånd utöver f som kedjan kan hoppa till från f. Tillståndet a är transient (ty ifrån a kan kedjan hoppa till det absorberande tillståndet e). Då är också tillstånden c och d transienta ty kedjan kan hoppa ifrån d till c och ifrån c till a.

11) Se definition 5.1 på sida 135 i Feldman & Valdez-Flores och min version av den på föreläsningsanteckningarna. Viktigt att få med här är att varje kö i nätverket har obegränsad kapacitet, att ankomsterna utifrån sker enligt Poissonprocesser, att alla betjäningstider är exponentialfördelade och att jobb skickas runt i nätet enligt en (subMarkovsk) transitionsmatris, samt att "all slump är oberoende av allt annat som pågår i nätet".

12) Jag glömde skriva i tesen att all tillverkning startar i nod A. Låt $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0.95 \\ 0.05 & 0 \end{bmatrix}$. Vi börjar med att invertera $\mathbf{I} - \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0.95 \\ 0.05 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 20 & -19 \\ -1 & 20 \end{bmatrix}$ och får $\mathbf{R} = [\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1} = \frac{1}{381}\begin{bmatrix} 400 & 380 \\ 20 & 400 \end{bmatrix}$. Vi läser av svaret på deluppgift (a): $E[N^A|X_0 = A] = R(A,A) = 400/381 \approx 1.050$, $E[N^B|X_0 = A] = R(A,B) = 380/381 \approx 0.997$. Låt, vidare, $\mathbf{b}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.85 \end{bmatrix}$ och beräkna $\mathbf{F}_g = \mathbf{R}\mathbf{b}_g = \frac{1}{381}\begin{bmatrix} 323 \\ 340 \end{bmatrix}$. Analogt $\mathbf{b}_k = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.10 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{F}_k = \mathbf{R}\mathbf{b}_k = \frac{1}{381}\begin{bmatrix} 58 \\ 41 \end{bmatrix}$. Vi läser av svaret på deluppgift (b): $F(A,g) = 323/381 \approx 0.848$, $F(A,k) = 58/381 \approx 0.152$. (obs att $F(A,g) + F(A,k) = 1$.) Lösningen av deluppgift (c) är $E[C] = 3200F(A,g) - (100 + 200R(A,A) + 400R(A,B) + 500F(A,k)) = 2712.86 - 785.04 = 1927.82$ kr.

13) Det gäller att lösa ut $\pi = [\,\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3\,]$ ur $\pi\mathbf{P} = \pi$ med bivillkoret $\pi\mathbf{1} = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Jag erhöll efter lite manipulerande räkningar $\pi = \frac{1}{47}[\,25 \quad 20 \quad 2\,]$.

14) Medelst integration ser vi att fördelningsfunktionen måste vara $F(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\alpha}$. (Kolla att $F'(x) = f(x)$.) Så $u = 1 - F(x) \Leftrightarrow u = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\alpha} \Leftrightarrow u = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} \Leftrightarrow u^{1/\alpha} = \frac{x_0}{x} \Leftrightarrow x = x_0 u^{-1/\alpha}$, där u är ett slumptal.

15) Stationär fördelning $\mathbf{p} = \frac{1}{11}[\,3 \quad 4 \quad 4\,]$ fås genom att lösa $\mathbf{pG} = 0$. Kostnadsvektorn är $\mathbf{f}^t = [\,7 \quad 5 \quad 8\,]$, så den del av totala kostnaden per tidsenhet som beror på besöken i de olika tillstånden är $\mathbf{pf} = 73/11 \approx 6.636$ kkr. Transitionskostnaderna specificeras av $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 5 & 0 & 10 \\ 8 & 10 & 0 \end{bmatrix}$. Vi får nu $\mathbf{G} \otimes \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & 5/3 & 16/3 \\ 5/2 & 0 & 5 \\ 2 & 15/2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 21/3 \\ 15/2 \\ 19/2 \end{bmatrix}$ och den del av kostnaden som beror av transitionerna mellen de olika tillstånden är $\mathbf{p}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1} = \frac{1}{11}[\,3 \quad 4 \quad 4\,]\begin{bmatrix} 21/3 \\ 15/2 \\ 19/2 \end{bmatrix} = 89/11 \approx 8.091$ kkr. Den totala kostnaden per tidsenhet är alltså $(73 + 89)/11 = 162/11 \approx 14.727$ kkr.

16) Vi har en M/M/1-kö med i snitt $\lambda = 35$ ankomster och $\mu = 40$ betjäningar per timma. Så $\rho = 35/40 = 0.9$. Formel (5.16) (sida 128 i F & V-F) ger oss uttrycket för den stationära fördelningen för en M/M/1/K-kö: $p_n = \rho^n(1-\rho)/(1-\rho^{K+1})$ ty $\rho \neq 1$, så den andel av tiden en sådan kö är fylld och ej tar emot ankommande jobb är $p_K = (\rho^K - \rho^{K+1})/(1-\rho^{K+1})$. Sätter vi $p_K = 0.05$ och löser ut K får vi $K \approx 10.1$ så kapaciteten K måste vara 10 eller 11, förmodligen

10. Observera att p_K avtager då K växer, så några andra K-värden behöver ej testas. Prövning ger nu att $p_K \approx 0.0508$ då $K = 10$ och ≈ 0.0437 då $K = 11$. Svaret på uppgiften är alltså $K = 10$.