TMS050: Matematisk statistik och simuleringsteknik, del B

Tentamen Z3 14 december 2002 e V

Inga hjälpmedel är tillåtna på teoridelen, som ska lämnas in för sig.

Tillåtna hjälpmendel på problemdelen är räknedosa utan information om kursen i minnena, Beta, kursens formel- och tabellsamling samt läroboken Feldman & Valdez-Flores: Applied Probability and Stochastic Processes.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p.

Jour är Yulia Yurgens, ankn 8296.

Lösningar publiceras på webben första vardagen efter tentamens slut. Rättningsprotokoll publiceras på anslagstavla i ”suckarnas gång” (källaren i Matematiskt centrum) och webben preliminärt den 18 december.

Teoriuppgifter

1) Låt $X = \{X_n; n = 0, 1, \cdots\}$ vara en Markovkedja med tillståndsrum E och transitionsmatris $\mathbf{P}$. Låt $f : E \to R$ vara en intäktsfunktion och skriv $\mathbf{f}$ för motsv kolumnvektor. Låt $\mu(i) = \Pr\{X_0 = i\}$, $i \in E$, och skriv μ för motsv radvektor. Visa att

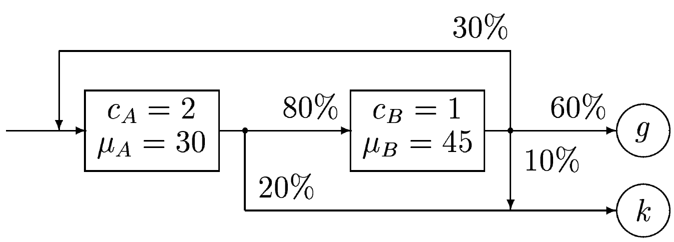
$$E_\mu[f(X_n)] = \mu \mathbf{P}^n \mathbf{f}$$ (4 p)

2) Antag att du har fått i uppgift att simulera oberoende observationer $x_1, \ldots, x_n$ ifrån en kontinuerlig fördelning med strängt växande fördelningsfunktion $F(x)$. Visa att följande tvåstegsalgoritm duger: (1) generera n st slumptal $u_1, \ldots, u_n \in (0, 1)$; (2) för $1 \le i \le n$, lös ut observationen x_i ur ekvationen $u_i = F(x_i)$. (4 p)

3) Betrakta en M/M/1-kö med ankomstintensitet λ och genomsnittliga betjäningstider $1/\mu$. Låt $\rho = \lambda/\mu$. (a) Visa att stationär fördelning existerar om, och endast om, $\rho < 1$ samt beräkna denna. (b) Antag att stationära förhållanden råder. Visa att total förväntad tid i kön (inkl betjäning), W, uppfyller $L = \lambda W$, där $L = \rho/(1 - \rho)$ är genomsnittligt totalt antal jobb i kön (inkl det som eventuellt är under betjäning). (4 p)

Övriga uppgifter

Uppgifterna 5 och 8 behandlar tillverkningssystemet definierat av nedanstående figur. I figuren betecknar g ”godkänd enhet” och k ”kasserad enhet”. Tillverkningsnoderna kallas A och B. All tillverkning startar i nod A. Tidsenheten är timma.



(Vänd)

4) En Markovkedja med tillståndsrummet $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ har transitionsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.2 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Klassificera tillstånden. (3 p)

5) I denna uppgift ska vi studera hur enheter skyfflas genom tillverkningssystemet i figuren på tesens första sida. Slumpmekanismen som bestämmer hur enheter skyfflas omkring i tillverkningssystemet antages vara Markovsk. (a) Beräkna förväntat antal gånger en godtycklig enhet bearbetas i nod A resp nod B. (b) Beräkna sannolikheten att en godtycklig enhet blir godkänd resp kasserad. (c) Varje råämne kostar 50 kr. Bearbetning i nod A och nod B kostar 190 kr resp 380 kr. Varje kasserad enhet kostar 380 kr och varje godkänd enhet ger en intäkt om 2660 kr. Låt C vara vinsten per tillverkad enhet. Beräkna $E[C]$. (4 p)

6) Ange utan bevis en algoritm för simulering i dator av observationer av en Poi(λ)-fördelning. (3 p)

7) En liten bensinstation består av en pump och plats för ytterligare två bilar köande till pumpen. Vi antar Poissonankomster med intensitet $\lambda = 30$ st per timma och att tankande bilar i genomsnitt behöver 4 minuter för tankning, ev snabbservice och betalning. Antag att betjäningstiderna är exponentialfördelade, oberoende av varandra och oberoende av ankomstprocessen, så att förutsättningarna för ett M/M/1/3-kösystem är uppfyllda. Varje tankande bil genererar en intäkt om ca 200 kr. Beräkna bensinstationens medelintäkt per timma. Jämför med vad medelintäkten skulle bli om kapaciteten vore oändlig. (3 p)

8) I denna uppgift ska vi studera flödet av råämnen igenom tillverkningssystemet i figuren på tesens första sida. Vi tänker oss att ankomstprocessen är Poisson med intensitet $\gamma_A = 38$ st per timma och att alla betjäningstider är oberoende exponentialvariabler med väntevärden $1/\mu_A$ timmar i nod A resp $1/\mu_B$ timmar i nod B. Vi tänker oss vidare att ankomstprocessen och samtliga pågående betjäningsprocesser är oberoende av varandra samt oberoende av den Markovska slumpmekanism som skickar runt jobben i nätet. Beräkna då stationära förhållanden råder (a) förväntat antal enheter vid de två noderna, (b) förväntad total tillverkningstid för en enhet och (c) tillverkningssystemets vinst per timma. (Ledning: i (c) ska du använda genomsnittsvinsten per enhet som du beräknade i uppgift 5 (c) ovan. Har du inget beräknat värde, använd $E[C] = 840$ kr.) (4 p)

Lycka till!