17) Enligt vad vi i senare delen av kursen lärt om betingade väntevärden gäller

$$E_\mu[f(X_n)] = \sum_i E[f(X_n)|X_0 = i]P(X_0 = i) = \sum_i \sum_j f(j)P(X_n = j|X_0 = i)\mu(i)$$

$$= \sum_i \mu(i) \sum_j P^n(i,j)f(j) = \sum_i \mu(i)\mathbf{P}^n(i,\cdot)\mathbf{f} = \mu\mathbf{P}^n\mathbf{f}$$

18) (1) $u_1, \ldots, u_n$ är simulerade observationer av n st oberoende $\mathrm{U}(0,1)$-variabler. (2) Enligt sats 3.1 gäller att $X = F^{-1}(U)$ har fördelningsfunktionen $F(x)$ om $U \sim \mathrm{U}(0,1)$, så $x_1, \ldots, x_n$ är simulerade observationer ifrån fördelningen definierad av $F(x)$.

19) Rita flödesschema och konstatera att balansekvationerna är

$$\begin{aligned} \lambda p_0 &= \mu p_1 \\ (\lambda+\mu)p_1 &= \lambda p_0 + \mu p_2 \\ (\lambda+\mu)p_2 &= \lambda p_1 + \mu p_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ur den första fås

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho\, p_0$$

Detta insättes i den andra. Då fås

$$\mu p_2 = (\lambda+\mu)\frac{\lambda}{\mu} p_0 - \lambda p_0 = \frac{\lambda^2}{\mu} p_0 \quad \Rightarrow \quad p_2 = \frac{\lambda^2}{\mu^2} p_0 = \rho^2\, p_0$$

Medelst insättning i den tredje fås nu analogt $p_3 = (\lambda^3/\mu^3)\, p_0 = \rho^3\, p_0$ och vi inser att $p_n = \rho^n\, p_0$ för $n = 1, 2, \ldots$. Kravet $\sum_n p_n = 1$ ger nu $p_0 \sum_n \rho^n = 1$. Serien är konvergent och lika med $1/(1-\rho)$ omm $\rho < 1$ (detta är alltså det exakta villkoret för existens av stationär fördelning) och för sådana ρ gäller att $p_0 = 1-\rho$. Således ges den stationära fördelningen $\mathbf{p} = [p_0 \quad p_1 \quad \cdots]$ av

$$p_n = \rho^n(1-\rho), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Låt N ha denna fördelning. Under stationära förhållanden kan vi räkna med att N jobb finns totalt i kön (inkl det som ev är underbetjäning). Låt $T_1, \ldots, T_N$ vara deras betjäningstider, som vi vet är oberoende och exponentialfördelade med väntevärdet $1/\mu$. Då ett godtyckligt jobb anländer till kön finns N st jobb före i kön, och den totala tiden i kön (innan betjäningen påbörjas) är $\sum_{n=1}^{N} T_n$. Låt T_{N+1} vara betjäningstiden för det just anlända jobbet. Obs att även T_{N+1} är exponentialfördelad med väntevärdet $1/\mu$ samt oberoende av de föregående betjåningstiderna. Totala tiden i kön för det just anlända jobbet är alltså $\sum_{n=1}^{N+1} T_n$. Väntevärdet av denna stokastiska tid är, eftersom N är oberoende av $T_1, \ldots, T_{N+1}$,

$$W = E[N+1]\,\frac{1}{\mu} = \frac{L+1}{\mu} = \frac{\frac{1}{1-\rho}}{\mu} = \frac{\rho}{1-\rho}\,\frac{1}{\lambda} = \frac{L}{\lambda}$$

20) Rita tillståndsdiagram. Tillståndet 5 är absorberande (ty 1:an i diagonalen). Tillstånden 2 och 6 bildar en irreducibel sluten mängd (ty 6 är det enda tillstånd utöver 2 som kedjan kan hoppa till ifrån 2 och 2 är det enda tillstånd utöver 6 som kedjan kan hoppa till från 6). Tillståndet 1 är transient (ty ifrån 1 kan kedjan hoppa till det absorberande tillståndet 5). Då är också tillstånden 3 och 4 transienta (ty kedjan kan hoppa ifrån 4 till 3 och ifrån 3 till 1)).

21) Vi tänker oss tillverkningssystemet som en Markovkedja med transienta tillstån A, B och absorberande tillstånd g, k. Transitionerna mellan de transienta tillstånden beskrivs av matrisen

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

Handräkning ger att

$$(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 50 & 40 \\ 15 & 50 \end{bmatrix}$$

Således är (a) $R(A,A) = 50/38 = 25/19 \approx 1.316$ och $R(A,B) = 40/38 = 20/19 \approx 1.053$. Med $\mathbf{b}_g = [0 \quad 0.6]^t$ fås nu

$$(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{b}_g = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 12 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Således är (b) $F(A,g) = 12/19 \approx 0.632$ och $F(A,k) = 1 - F(A,g) = 7/19 \approx 0.368$. Vi får nu (c)

$$E[C] = \frac{12}{19}\cdot 2660 - \left(50 + \frac{25}{19}\cdot 190 + \frac{20}{19}\cdot 380 + \frac{7}{19}\cdot 380\right) = 1680 - 840 = 840 \text{ kr}$$

22) Känt är att tiderna mellan impulser i Poissonprocessen är oberoende exponentialvariabler med väntevärden $1/\lambda$. Så att om $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, så kan vi tänka oss att N är antalet impulser i intervallet $[0,1]$ i en Poissonprocess med intensitet λ. Låt $S_1, S_2, \ldots$ vara tiderna mellan impulser i denna Poissonprocess. Då gäller att $N = n$ omm $T_n = \sum_{i=1}^{n} S_i \leq 1$ och $T_n + S_{n+1} > 1$. Vi kan alltså simulera en observation n av N så här:
   (1) tag ett slumptal u och sätt s till $-(1/\lambda)\ln u$;
   (2) sätt t till s och n till 0;
   (3) medan $t < s$, gör
      (a) tag ett slumptal u och sätt s till $-(1/\lambda)\ln u$;
      (b) sätt t till $t + s$ och n till $n+1$;
   När steg (3) är klart är $t > 1$ och n en observation av N.

23) Betjäningsfaktorn är $\rho = \lambda/\mu = 30/15 = 2$ ty $\mu = 60/4 = 15$ st per timma. Enligt formel (5.16) gäller att

$$p_K = \frac{\rho^3(1-\rho)}{1-\rho^4} \quad \Rightarrow \quad 1 - p_K = \frac{1-\rho^3}{1-\rho^4} = \frac{7}{15}$$

Det följer att den effektiva inintensiteten är $\lambda(1-p_K) = 30\,(7/15) = 14$ st jobb per timma. Medelintäkten blir därför ca $14\cdot 200 = 2800$ kr per timma. Om alla anländande bilar kan tas om hand (d.v.s $K = \infty$), så skulle medelintäkten bli ca $30 \cdot 200 = 6000$ kr per timma om bensinstationen då skulle fungera stationärt eller om man tar betalt när bilen anländer. Problemet är att den inte blir stationär, utan antalet bilar i kön skulle växa emot ∞, vilket leder till att betjäning pågår kontinuerligt och utprocessen får intensiteten 15 st per timma. Detta ger medelintäkten $15\cdot 200 = 3000$ kr per timma om man tar betalt när bilen lämnar. Godkänt har även de fått som endast svarat att kösystemet inte kommer att jobba stationärt.

24) De effektiva inintensiterna till de två noderna ges av

$$\begin{aligned} \lambda_A &= 38 + 0.3\lambda_B \\ \lambda_B &= 0.8\lambda_A \end{aligned}$$

som har lösningen $\lambda_A = 50$, $\lambda_B = 40$ st per timma. Nod A är därför en M/M/2-kö med $r_A = 50/30 = 5/3 \approx 1.667$ och $\rho_A = r_A/2 = 5/6 \approx 0.833$ och nod B är en M/M/1-kö med $\rho_B = 40/45 = 8/9 \approx 0.889$. Enligt formel i uppgift 5.4 är genomsnittligt antal jobb vid A lika med $L_A = 2\rho_A/(1-\rho_A^2) = 60/11 \approx 5.45$ st och enligt formel (5.7) gäller för nod B att $L_B = \rho_B/(1-\rho_B) = 8$ st. Således är (a) $L = L_A + L_B = 60/11 + 8 = 148/11 \approx 13.45$ st. Enligt Littles sats för Jacksonnät är totala tiden i nätet i medel lika med (b) $L/\gamma_{\text{tot}} = 148/418 = 74/209 \approx 0.354$ timmar, d.v.s ca 21 minuter och 15 sekunder. I snitt anländer och bearbetas $\gamma_{\text{tot}} = 38$ jobb per timma. Således är den förväntade vinsten (c) $38 \cdot 840 = 31920$ kr per timma.