Lösningar till TMS050: Matematisk statistik och simuleringsteknik, del B den 29/8-02

1. Vi har
$$\begin{aligned}\Pr\{X_2=j|X_0=i\} &= \sum_{k\in E}\Pr\{X_2=j,X_1=k|X_0=i\}\\ &= \sum_{k\in E}\Pr\{X_2=j|X_1=k,X_0=i\}\Pr\{X_1=k|X_0=i\}\\ &= \sum_{k\in E}\Pr\{X_2=j|X_1=k\}\Pr\{X_1=k|X_0=i\} = \sum_{k\in E}P(k,j)P(i,k)=P^2(i,j)\end{aligned}$$
Detta visar påståendet i fallet $n=2$. Det allmänna fallet följer medelst induktion (hur induktionssteget går till behöver ej visas explicit).

2. (a) M/M/3/5-kön har 3 betjäningsstationer och maximalt antal kunder i kön (inkl de under betjäning) är 5. (b) Generatorn för $M/M/\infty$-kön är
$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 2\mu & -(2\mu+\lambda) & \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 3\mu & -(3\mu+\lambda) & \lambda & 0 & \\ \vdots & & & & & & \end{bmatrix}$$
och kravet $\mathbf{pG}=\mathbf{0}$ ger oss ekvationssystemet
$$\begin{cases}-\lambda p_0+\mu p_1=0\\ \lambda p_0-(\mu+\lambda)p_1+2\mu p_2=0\\ \lambda p_1-(2\mu+\lambda)p_2+3\mu p_3=0\\ \lambda p_2-(3\mu+\lambda)p_3+4\mu p_4=0\\ \vdots\end{cases}$$
Så $p_1=(\lambda/\mu)p_0$, vilket ger $p_2=(\lambda/\mu)^2p_0/2$, vilket ger $p_3=(\lambda/\mu)^3p_0/3!$, etc, och vi förstår att $p_k=(\lambda/\mu)^kp_0/k!$. Kravet $\sum_{k=0}^{\infty}p_k=1$ ger nu att $p_0=e^{-\lambda/\mu}$ och $p_k=e^{-\lambda/\mu}(\lambda/\mu)^k/k!$ följer.

3. Se definition 5.1 på sida 135 i Feldman & Valdez-Flores och min version av den på föreläsningsanteckningarna. Viktigt att få med här är att varje kö i nätverket har obegränsad kapacitet, att ankomsterna utifrån sker enligt Poissonprocesser, att alla betjäningstider är exponentialfördelade och att jobb skickas runt i nätet enligt en (submarkovsk) transitionsmatris, samt att ”all slump är oberoende av allt annat som pågår i nätet”.

4. Vi modellerar tillverkningssystemet med en Markovkedja med tillståndsrum $\{S,M,K,g,f\}$ (g och f står för godkänd resp kasserad) och transitionsmatris
$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0.3&0&0.6&0.1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$
Sökt är sannolikheten $F(M,f)$. Property 2.19 i Feldman & Valdez-Flores säger att den sökta sannolikheten beräknas enligt
$$F(M,f)=(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{b}_f(M)$$
där $\mathbf{Q}$ är restriktionen av $\mathbf{P}$ till de transienta tillstånden M,S,K, $\mathbf{I}$ är enhetsmatrisen och kolumnvektorn $\mathbf{b}_f$ ger sannolikheterna för hopp in i det absorberande tillståndet f: $\mathbf{b}_f=[0\quad 0\quad 0.1]^t$. Vi får att
$$(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&-0.3&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{10}{7}&\frac{10}{7}\\0&\frac{10}{7}&\frac{10}{7}\\0&\frac{3}{7}&\frac{10}{7}\end{bmatrix}$$
och det följer att $F(M,f)=1\cdot 0+\frac{10}{7}\cdot 0+\frac{10}{7}\cdot 0.1=\frac{1}{7}\approx 0.143$.

5. Enligt Property 3.1 i Feldman & Valdez-Flores ska man beräkna $x = \Phi^{-1}(r)$, där r är slumptalet och Φ den standardiserade Normalfördelningsfunktionen (som finns tabellerad). Så om man tänker sig slumptalet r som en sannolikhet och i normalfördelningstabellens marginal hittar motsv x-värde, så får man normalfördelade slumptal. Använder man denna metod på slumptalet 0.846219, så ser man att det svarar mot värdet $x = 1.02$. Obs att man normalt måste interpolera för att få normalfördelningsvärdet och att detta blir svårt om slumptalet ligger nära 0 eller 1.

6. Lös först $\mathbf{pG} = 0$ för att få fram att stationära fördelningen är $\mathbf{p} = [\,0.25 \quad 0.5 \quad 0.25\,]$. Kostnadsvektorn är $\mathbf{f} = [\,7 \quad 5 \quad 8\,]^t$ och transitionskostnader lägger vi i matrisen

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Enligt Property 4.7 i Feldman & Valdez-Flores gäller att kostnaden per tidsenhet i det långa loppet är $\mathbf{pf} + \mathbf{p}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1}$. Vi får att $\mathbf{pf} = 0.25 \cdot 7 + 0.5 \cdot 5 + 0.25 \cdot 8 = 6.25$, samt att

$$\mathbf{p}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1} = [\,0.25 \quad 0.5 \quad 0.25\,] \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 5 & 0 & 5 \\ 5 & 15 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [\,0.25 \quad 0.5 \quad 0.25\,] \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = 13.75$$

Totala kostnaden blir alltså $6.25 + 13.75 = 20$ kr per tidsenhet.

7. (a) M/M/c-kön är stationär om $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$, d.v.s om $c > \frac{\lambda}{\mu} = \frac{7/8}{1/2} = 1.75$, så $c = 2$. (b) Låt x vara genomsnittsintäkten per bil. Verkstaden kostar $c \cdot 200 + 100 = 500$ kr/timma och om medelintäkten ska vara större krävs att $\frac{7}{8} \cdot x > 500$, vilket ger att $x \geq 571.43$ kr.

8. Låt $\lambda_S, \lambda_M, \lambda_K$ vara de effektiva inintensiterna till de tre noderna. Vi får att $\lambda_S = 1$ u/t.u (enhet per tidsenhet) och att $\lambda_K = \lambda_M$ samt $\lambda_M = \lambda_S + 0.3\lambda_K$. Lösningen till dessa ekvationer är $\lambda_M = \lambda_K = 10/7$ u/t.u. Alla ankomster sker till nod S, så initialfördelning till den Markovkedja som beskriver en godtycklig enhets väg genom nätet är $\nu = [\,1 \quad 0 \quad 0\,]$. Restriktionen av denna Markovkedjas transitionsmatris till de transienta tillstånden S, M, K är matrisen $\mathbf{Q}$ från lösningen till uppg 4. Låt $\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$. (Obs att $\mathbf{R}$ bestämdes i uppg 4.) Enligt Property 5.4 i Feldman & Valdez-Flores gäller $E[T_{\text{net}}] = \nu(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{W}$, där $\mathbf{W} = [\,W_S \quad W_M \quad W_K\,]^t$. Nod S är en M/M/1-kö med $\lambda = 1$ och $\mu = 1/0.9 = 10/9$, så $\rho = 0.9$ och $W_S = 1/(\mu - \lambda) = 9$ t.u enl formel (5.12) i Feldman & Valdez-Flores. Nod M är också en M/M/1-kö, men nu är $\lambda = 10/7$ och $\mu = 1/0.6 = 5/3$, så $\rho = 6/7$ och $W_M = 21/5 = 4.2$ t.u. Nod K är en M/M/2-kö med $\lambda = 10/7$ och $\mu = 1/1.25 = 4/5$, så $r = \lambda/\mu = 25/14$ och $\rho = r/c = 25/28$. De relevanta formlerna för M/M/c-kön finns på sida 132 i Feldman & Valdez-Flores. Antingen använder man dem eller så gör man det lättare för sig och utnyttjar resultatet i fallet $c = 2$ i övn 5.4 (c) (s 149). Jag gör det senare och får $W = L/\lambda$, där

$$L = \frac{2\rho}{1 - \rho^2} = \frac{2\frac{25}{28}}{1 - (\frac{25}{28})^2} = \frac{1400}{159} \approx 8.805 \quad \Rightarrow \quad W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1400/159}{10/7} = \frac{980}{159} \approx 6.164$$

Så $W_K \approx 6.164$. Räkna nu själv ut att $\nu(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = [\,1 \quad 10/7 \quad 10/7\,]$ och vi får slutligen att

$$E[T_{\text{net}}] = [\,1 \quad 10/7 \quad 10/7\,] \begin{bmatrix} 9 \\ 21/5 \\ 980/159 \end{bmatrix} = \frac{3785}{159} \approx 23.81$$

tidsenheter.