TMS050: Matematisk statistik och simuleringsteknik, del B

Tentamen Z3 3 april 2002 f M

Inga hjälpmedel är tillåtna på teoridelen, som ska lämnas in för sig.

Tillåtna hjälpmendel på problemdelen är räknedosa utan information om kursen i minnena, Beta, kursens formel- och tabellsamling samt läroboken Feldman & Valdez-Flores: Applied Probability and Stochastic Processes.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p.

Jour är Ulrica Olofsson (ankn 5336).

Lösningar publiceras på webben.

Teoriuppgifter

1. Låt $F(x)$ vara X:s fördelningsfunktion, som vi ska anta är strikt växande och kontinuerlig. Då har $F(x)$ en invers $F^{-1}(y)$ som uppfyller

$$y = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = F^{-1}(y)$$

   Låt $U \sim \mathrm{U}(0,1)$ (alltså likformigt fördelad på $(0,1)$). Visa att den stokastiska variabeln $V = F^{-1}(U)$ har samma fördelning som X. (4 p)

2. Härled stationär fördelning för en M/M/1-kö med ankomst- och betjäningsintensiteter λ respektive μ. (4 p)

3. Förklara vad ett s k Jackson-nät är. (4 p)

Problem

4. En Markovkedja med tillståndsrummet $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ har transitionsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0.85 \\ 0.21 & 0 & 0.61 & 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.13 & 0.87 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.99 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

   Klassificera tillstånden. (3 p)

5. Betrakta Markovkedjan $X = \{X_n; n = 0, 1, \cdots\}$ med tillståndsrum $E = \{1,2,3\}$ och transitionsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Antag att $X_0 = 1$. (a) Ange $P(X_1 = 2)$. (b) Beräkna $P(X_2 = 2)$. (3 p)

(vänd!)

6. Betrakta Markovkedjan med tillståndsrum $\{1,2,3,4,5\}$ och transitionsmatris

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

och initialfördelning $\mu = [0 \quad 0 \quad 1/2 \quad 0 \quad 1/2]$. Beräkna förväntat antal gånger som kedjan är i de 5 tillstånden. (4 p)

7. Markovprocessen $X = \{X_t, t \geq 0\}$ på tillståndsrummet $\{1,2,3\}$ har generator

$$G = \begin{bmatrix} -1/7 & 1/21 & 2/21 \\ 3/10 & -2/5 & 1/10 \\ 1/24 & 3/24 & -1/6 \end{bmatrix}$$

och initialfördelning $\mu = [1/6 \quad 1/2 \quad 1/3]$. Här är sju slumptal:

0.998222, 0.254607, 0.284558, 0.705006, 0.511856, 0.500152, 0.321061

Använd dem till att simulera början av en realisering av processen. Tidsenheten är minuter. (4 p)

8. Modellera en liten bilverkstad med 2 reparatörer och med utrymme för högst 3 bilar, varav 2 är under reparation och 1 väntar på reparation som ett markovskt kösystem. Antag att reparatörerna i medel behöver 3 timmar per reparation och att det i medel ankommer 1 bil per 2 timmar. Varje reparatör kostar 175 kr/timma och verkstaden inkl utrustning kostar i kapital och hyra 60 kr/timma. Hur stor behöver medelintäkten per bil vara för att verkstaden ska ge ett överskott? (4 p)

Lycka till!