Lösningar till TMS050: Matematisk statistik och simuleringsteknik, del B den 3/4-02

1) Detta är Sats 3.1. Ett bevis hittar du i föreläsningsanteckningarna, sida 18.

2) Se Feldman & Valdez-Flores sidorna 122-124, eller motsv sidor i föreläsningsanteckningarna.

3) Se definition 5.1 på sida 135 i Feldman & Valdez-Flores och min version av den i föreläsningsanteckningarna. Viktigt att få med här är att varje kö i nätverket har obegränsad kapacitet, att ankomsterna sker enligt Poissonprocesser, att betjäningstiderna är exponentialfördelade och att jobb skickas runt i nätet enligt en (submarkovsk) transitionsmatris, samt att "all slump är oberoende av allt annat som pågår i nätet".

4) Tillståndet 5 är absorberande (ty 1:an i diagonalen). Tillstånden 2 och 6 bildar en irreducibel sluten mängd (ty 6 är det enda tillstånd utöver 2 som kedjan kan hoppa till ifrån 2 och 2 är det enda tillstånd utöver 6 som kedjan kan hoppa till från 6). Tillståndet 1 är transient (ty ifrån 1 kan kedjan hoppa till det absorberande tillståndet 5). Då är också tillstånden 3 och 4 transienta (ty kedjan kan hoppa ifrån 4 till 3 och ifrån 3 till 1)).

5) (a) $P(X_1 = 2) = P(1, 2) = 0.1$. (b) $P(X_2 = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 2)+P(X_1 = 2, X_2 = 2)+P(X_1 = 3, X_2 = 2) = P(1, 1)P(1, 2) + P(1, 2)P(2, 2) + P(1, 3)P(3, 2) = 0.8 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 1 = 0.25$.

6) Sats 2.18 på sida 59 talar om för oss hur vi ska beräkna $R(i, j) = E[N^j|X_0 = i]$, för transienta i, j, vilket är vad vi behöver eftersom man direkt ser att $E[N^1] = E[N^2] = E[N^4] = \infty$. Tillstånden $1, 2, 4$ är ju rekurrenta (ständigt återkommande) och de nås alla med positiv sannolikhet från de två transienta tillstånden $3, 5$ som ju kedjan startar ifrån. Enligt satsen ska vi bilda restriktionen $\mathbf{Q}$ av $\mathbf{P}$ till $\{3, 5\}$ och invertera $\mathbf{I} - \mathbf{Q}$ för att få reda på $R(i, j)$. Så:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{I} - \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 5/6 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & 5/2 \end{bmatrix}$$

Vi får nu att $E[N^3] = E[N^3|X_0 = 3]P(X_0 = 3) + E[N^3|X_0 = 5]P(X_0 = 5) = R(3, 3)\mu(3) + R(5, 3)\mu(5) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3/2$ och $E[N^5] = E[N^5|X_0 = 3]P(X_0 = 3) + E[N^5|X_0 = 5]P(X_0 = 5) = R(3, 5)\mu(3) + R(5, 5)\mu(5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3/2$.

7) Processens initialtillstånd är 3 eftersom $0.998222 > 1/6 + 1/2 = 2/3$. (Den regel som jag använder här och analogt nedan är att initialtillståndet är 1 om slumptalet $u \le 1/6$, 2 om $1/6 < u \le 1/6+1/2 = 2/3$ och 3 om $u \ge 2/3$.) I tillståndet 3 stannar den $-6 \ln 0.254607 = 8.21$ minuter. Därifrån hoppar den till 2 eftersom $0.284558 > 1/4$ (sannolikhetsfördelningen för nästa tillstånd är ju $[1/4 \quad 3/4]$ om nuvarande tillstånd är 3). I tillståndet 2 stannar processen $-(5/2) \ln 0.705006 = 0.87$ minuter. Från tillståndet 2 hoppar processen till tillståndet 1 eftersom $0.511856 \le 3/4$ (sannolikhetsfördelningen för nästa tillstånd är ju $[3/4 \quad 1/4]$ om nuvarande tillstånd är 2). I tillståndet 1 stannar processen $-7 \ln 0.500152 = 4.85$ minuter. Till sist konstaterar vi att processen därpå hoppar till tillståndet 2 eftersom $0.321061 \le 1/3$ (sannolikhetsfördelningen för nästa tillstånd är ju $[1/3 \quad 2/3]$ om nuvarande tillstånd är 1). I följande tabell sammanfattas simuleringen:

Tidpunkt	Tillstånd	Uppehållstid
0.00	3	8.21
8.21	2	0.87
9.08	1	4.85
13.93	2	

8) Detta är en födelse- och dödsprocess med tillstånden $\{0, 1, 2, 3\}$. Födelseintensiteter är $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ och dödsintensiter är $\mu_1 = 1/3$, $\mu_2 = \mu_3 = 2 \cdot 1/3 = 2/3$. Vi erhåller (j f r (5.21) i Feldman & Valdez-Flores) för stationära fördelningen $\mathbf{p} = [p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3]$, $p_1 = p_0 \cdot \lambda_0/\mu_1 = p_0 \cdot 3/2$, $p_2 = p_1 \cdot \lambda_1/\mu_2 = p_0 \cdot 3/2 \cdot 3/4 = p_0 \cdot 9/8$, $p_3 = p_2 \cdot \lambda_2/\mu_3 = p_0 \cdot 9/8 \cdot 3/4 = p_0 \cdot 27/32$. Från $p_0+p_1+p_2+p_3 = 1$ drar vi nu slutsatsen $p_0 = 32/143$, $p_1 = 48/143$, $p_2 = 36/143$ och $p_3 = 27/143$ (den som klarar detta har 1 p). Antag att varje färdigreparerad bil i medel ger intäkten x kr. Enligt Sats 4.7

i Feldman & Valdez-Flores (se också föreläsningsanteckningarna) ska vi bilda en "hopp-intäkts"-matris

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{bmatrix}$$

(det är ju bara transitionerna $1 \to 0$, $2 \to 1$ och $3 \to 2$ som ger någon intäkt). Sats 4.7 ger nu att medelintäkten per timma är

$$\mathbf{p}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1} = \begin{bmatrix} \frac{32}{143} & \frac{48}{143} & \frac{36}{143} & \frac{27}{143} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2x}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2x}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{58x}{143}$$

Balans har vi då utgifterna är lika med inkomsterna, d v s då $410 = 58x/143$. Enda lösning till denna ekvation är $x = 410 \cdot 143/58 = 1010.86$ kr. Verkstaden ger alltså ett överskott om intäkten per bil i medel är större än 1011 kr.