CHALMERS

Matematisk statistik för Z, del B

Tentamen 30 augusti 2001, fm, V-huset

Tillåtna hjälpmendel är läroboken Feldman & Valdez-Flores, räknedosa, Beta samt grundkursens formel- och tabellsamling.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p.

Examinator är Tommy Norberg, och jour är Jonas Tekele, ankn 8295.

Uppgifter

1. Låt $X = \{X_n; n = 0, 1, \cdots\}$ vara en Markovkedja med tillståndsrum E och transitionsmatris $\mathbf{P}$. Låt μ vara radvektorn svarande mot kedjans initialfördelning. Visa direkt utan att använda något annat från kap 2 i Feldman & Valdez-Flores än definitionen av $\mathbf{P}$ och μ, att $P(X_2 = k)$ är elementet på plats k i radvektorn $\mu\mathbf{P}^2$. (4 p)

2. En Markovkedja med tillståndsrummet $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ har transitionsmatrisen
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0.3 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$
Klassificera tillstånden. (4 p)

3. Markovkedjan $X = \{X_n; n = 0, 1, \cdots\}$ med tillståndsrum $E = \{F_1, S, K, F_2, G\}$ och transitionsmatris
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
används för att modellera en sammansättningsprocess. Råämnen förbereds i nod F_1. Därefter sätts de samman i nod S och kontrolleras i nod K. En viss andel godkänns ej. Dessa plockas isär i nod F_2 för att sättas samman igen i nod S, etc. Råämnena som används till en enhet kostar 37 kr, det kostar ytterligare 23 kr att förbereda dem för sammansättning i nod F_1, det kostar 36 kr att sätta samman dem i nod S och det kostar 9 kr att kontrollera funktionen i nod K. Att plocka isär en enhet i nod F_2 kostar 45 kr. Beräkna förväntad kostnad per producerad enhet. (3 p)

(vänd)

4. Låt $N \sim \text{Poi}(\lambda)$. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende och fördelade som den stokastiska variabeln X. Bevisa att

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \lambda E[X]$$

gäller då N och sekvensen $X_1, X_2, \ldots$ är oberoende. (4 p)

5. En Markovkedja $X = \{X_n; n = 0, 1, \cdots\}$ har transitionsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.05 & 0.10 & 0.15 \\ 0 & 0.40 & 0.60 & 0.00 \\ 0 & 0.30 & 0.20 & 0.50 \\ 0 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

Tillstånden kallar vi $1, 2, 3, 4$. Den startar i tillståndet 1. Bestäm

(a) sannolikhetsfördelningen för tiden $T = \min\{i : X_i \neq 1\}$ (1 p)

(b) sannolikhetsfördelningen för X_T (2 p)

(c) de s k "steady state"-sannolikheterna (3 p)

6. Till en liten bilverkstad anländer bilar i behov av reparation med en intensitet av 2 st/dag. Man har 1 mekaniker, som i snitt behöver 3 timmar per reparation. Antag att en arbetsdag är 8 timmar lång. I verkstaden finns plats för maximalt 4 bilar (varav 1 är under pågående reparation). Bilar som anländer då verkstaden är full avvisas. Beräkna under "steady state"-förhållanden

(a) hur många timmar i snitt per dag som verkstaden är full och därför ej kan ta emot ev ankommande bilar (1 p)

(b) väntevärdet av totala tiden i verkstaden för en bil (3 p)

Antag att bilar anländer enl en Poissonprocess och att reparationstiderna är oberoende av varandra och av ankomstprocessen samt Exponentialfördelade.

7. En produktionslinje består av tre stationer i serie kallade A, B, C. Enheter ankommer till station A med intensiteten 8 st/timma. Station A består av en maskin som klarar 12 enheter/timma. Station B består av två parallella maskiner som vardera klarar 6.25 enheter/timma och station C är en maskin med kapacitet 12.5 enheter/timma. 20% av det som kommer ut ur station B måste processas om och skickas därför tillbaka till A. Modellera produktionslinjen som ett (Markovskt) Jackson-nät, antag jämnvikt ("steady state") och beräkna

(a) förväntat totalt antal enheter i produktionslinjen (2 p)

(b) väntevärdet av totala tiden en enhet är i produktionslinjen (3 p)

Lycka till!