CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET
Matematisk statistik

Matematisk statistik för Z, del B

Tentamen 18 april 2001 (f M)

Tillåtna hjälpmendel är läroboken Feldman & Valdez-Flores, räknedosa, Beta samt grundkursens formel- och tabellsamling.

För betyget 3 krävs 12 p, för 4:a 18 p och för 5:a 24 p av totalt 30 p.

Examinator är Tommy Norberg, och jour är Jonas Tekele, ankn 8295.

Uppgifter

1. Betrakta en Markovkedja $X = \{X_n; n = 0, 1, \cdots\}$ med tillståndsrum E och transitionsmatris $\mathbf{P}$. Låt μ vara radvektorn svarande mot kedjans initialfördelning. Låt $\mathbf{f}$ vara radvektorn svarande mot den reellvärda funktionen f definierad på E. Visa resultatet
$$E_\mu[f(X_1)] = \mu\mathbf{P}\mathbf{f}$$
utan att använda några satser från kap 2 i Feldman & Valdez-Flores. (4 p)

2. Betrakta Markovkedjan $X = \{X_n; n = 0, 1, \cdots\}$ med tillståndsrum $E = \{1, 2, 3\}$ och transitionsmatrisen
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.04 & 0.16 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
Låt $T = \min\{n \geq 1 : X_n \neq X_0\}$ vara tidpunkten då kedjan för första gången ej är i initialtillståndet. Antag att $X_0 = 1$. Bestäm (a) T:s och (b) X_T:s sannolikhetsfördelning. (4 p)

3. En Markovkedja med tillståndsrummet $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ har transitionsmatrisen
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0.1 & 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0.1 & 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}$$
Klassificera tillstånden. (4 p)

(vänd)

4. Enheter rör sig i en tillverkningskedja enligt en Markovkedja med tillstånd A, B, C, D, E och transitionsmatris

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.9 & 0 & 0 & 0.05 \\ 0.1 & 0.05 & 0.8 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tillstånden A, B, C svarar mot steg i tillverkningen, D är sluttillstånd för de godkända produkterna och E för de övriga. Tillverkningen av en produkt påbörjas alltid med steg A. Enheterna drar kostnaden 20 kr, 10 kr och 15 kr varje gång de är i steg A, B resp C. Bestäm (a) den förväntade proportionen godkända produkter och (b) den förväntade kostnaden per påbörjad enhet. (4 p)

5. Låt den stokastiska variabeln X vara Paretofördelad med parametrar $\alpha > 0$ och $u > 0$. (Paretofördelningen har fördelningsfunktionen $F(x) = 1 - (u/x)^\alpha$, $x > u$.) Härled ett uttryck på formen $x = h(r)$ med vilket man kan simulera observationer x på X m h a slumptal r. (4 p)

6. Jag bad min dator generera en vektor med $n = 10$ slumptal. Här är resultatet:

(0.3857, 0.0014, 0.2298, 0.9701, 0.7873, 0.3515, 0.5318, 0.5164, 0.0879, 0.1850)

Använd så många du behöver av dem för att simulera de tre första tillstånden och deras resp uppehållstider som Markovprocessen med tillståndsrum $E = \{A, B, C\}$ och generator

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

genomlöper. Initialfördelning är den stationära. Ange först de algoritmer och formler som du tänker använda för att bestämma tillstånd och uppehållstider. (5 p)

7. En produktionslinje består av tre stationer i serie kallade A, B, C. Enheter ankommer till station A med intensiteten 8 st/timma. Station A består av en maskin som klarar 12 enheter/timma. Station B består av två parallella maskiner som vardera klarar 5 enheter/timma och station C är en maskin med kapacitet 10 enheter/timma. Modellera produktionslinjen som ett (Markovskt) Jackson-nät, antag jämnvikt och beräkna (a) förväntat totalt antal enheter i produktionslinjen, och (b) väntevärdet av totala tiden en enhet är i produktionslinjen. (5 p)

Lycka till!